



# Quels capteurs de vibrations pour la surveillance de santé des structures mécaniques ?

Désirée Najm

## ► To cite this version:

Désirée Najm. Quels capteurs de vibrations pour la surveillance de santé des structures mécaniques ?. Mécanique des matériaux [physics.class-ph]. Université Paris-Est, 2015. Français. NNT : 2015PEST1072 . tel-01186376

**HAL Id: tel-01186376**

**<https://pastel.archives-ouvertes.fr/tel-01186376>**

Submitted on 24 Aug 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ÉCOLE DOCTORALE SCIENCES, INGÉNIERIE ET ENVIRONNEMENT

**THÈSE**

pour l'obtention du diplôme de

**DOCTEUR DE  
L'UNIVERSITÉ PARIS-EST**

Spécialité : *Structures et Matériaux*

présentée par

**Désirée NAJM**

**Quels capteurs de vibrations pour la surveillance de  
santé des structures mécaniques ?**

soutenue le 28 janvier 2015

Devant le jury composé de :

Président :	J.-J. SINOUE	(Ecole Centrale Lyon)
Rapporteurs :	O. ABRAHAM	(IFSTTAR - Nantes)
	L. GARIBALDI	(POLITECNICO Di Torino)
Examineur :	M. BALABANE	(Université Paris 13)
Directeur de thèse :	P. ARGOUL	(ENPC)
Co-Encadrant de thèse :	G. CUMUNEL	(ENPC)
Co-Directeurs de thèse :	W. RAPHAEL	(USJ)
	F. KADDAH	(USJ)
Invitée :	V. DELAUAUD	(CORNIS)





*« L'impossible, nous ne l'atteignons pas, mais il nous sert de lanterne »*

René Char



# Remerciements

En préambule à ce mémoire, je souhaite adresser mes remerciements les plus sincères aux personnes qui m'ont apporté leur aide et qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire. Le présent travail a été effectué grâce à une collaboration entre l'Ecole des Ponts ParisTech et le CNRS Libanais. Je les remercie de m'avoir accueillie et soutenue pendant ma thèse.

Je tiens tout d'abord à remercier Monsieur Jean-Jacques Sinou de m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de thèse ainsi que Madame Odile Abraham et Monsieur Luigi Garibaldi d'avoir accepté la lourde tâche d'être rapporteurs de ce mémoire et d'avoir pris une partie de leur temps pour le lire et en faire une critique constructive. Je remercie également Monsieur Mikhael Balabane d'avoir examiné ce travail.

Ma sincère gratitude à Monsieur Pierre Argoul, qui a bien voulu diriger mes travaux pendant ces trois années, et j'exprime ma profonde reconnaissance à Monsieur Gwendal Cumunel, sans qui ce travail n'aurait pas pu voir le jour pour m'avoir fait confiance et aidé tant sur le plan scientifique qu'humain, pour la qualité de son encadrement et ses conseils avisés, me transmettant ainsi une rigueur et clarté nécessaires à une véritable recherche scientifique.

Je souhaite également remercier Messieurs Wassim Raphael et Fouad Kaddah, mes co-directeurs de thèse au Liban, qui m'ont encouragée, conseillée et suivie pour aller jusqu'au bout. Je suis également très reconnaissante envers Monsieur Charles Tabet, responsable du programme des bourses au CNRS libanais, pour son soutien et ses encouragements constants durant ces trois années.

J'adresse mes respectueux remerciements à Monsieur Karam Sab, directeur du laboratoire Navier à l'Ecole des Ponts Paris-Tech, pour m'avoir acceptée au sein du laboratoire.

De sincères remerciements à nouveau à Madame Géraldine Vue et Messieurs Daniel Cintra et Alain Tamaint pour leurs aides précieuses durant les expérimentations. Je tiens à remercier également Mesdames Cécile Blanchemanche, Brigitte Vigo, Marie-Claude Grosheny et Marie-Françoise Kaspi pour leurs aides administratives.

Et j'adresse également une pensée toute particulière et des remerciements chaleureux aux collègues de bureau et tous les membres du laboratoire (A. Allani, B. Kabalan, D. Dib, A. Lerpinière, M. Godio, T.T.H. Le Petit, ...) avec qui j'ai partagé un quotidien plein de sympathie et d'amitié.

---

Enfin, je ne saurais jamais remercier assez ma famille pour leur amour et leur affection. Je dédie ce modeste travail à mon père et à ma mère pour la confiance et le soutien inconditionnel dont ils ont fait preuve tout au long de ces trois années, et qui étaient pour moi une source de motivation supplémentaire, à ma chère sœur Gretta et son mari Imam pour leur soutien moral et encouragements permanents, et à mes chers frères Dr. Raji et Roni qui ont su me remonter régulièrement le moral durant cette longue période.

J'espère que j'ai pu rendre ma famille fière et qu'elle trouvera ici le résultat de ces trois années.

Puisse Dieu faire en sorte que ce travail porte son fruit.

## **Titre : Quels capteurs de vibrations pour la surveillance de santé des structures mécaniques ?**

**Résumés :** La thèse a pour objectif de définir les principes et les approches d'une mise en œuvre pratique des capteurs de vibrations pour l'évaluation dynamique des structures, notamment la détection d'endommagements. L'idée générale est d'étudier les combinaisons instrumentation/méthode de détection.

Ainsi, une étude numérique de sensibilité de différentes méthodes de détection et de localisation d'endommagement utilisant les paramètres modaux (essentiellement fréquences propres et déformées modales) a été réalisée en fonction du type de capteur utilisé, du nombre de capteurs, de la sévérité du défaut et de la dispersion des paramètres modaux. Le cas d'application choisi est celui d'une poutre en aluminium bi-encastree. Un panorama des capacités de chacune des méthodes pour l'évaluation dynamique des ouvrages a ainsi pu être dressé.

Dans l'ensemble, l'application des méthodes de détection d'endommagement a fourni de meilleurs résultats à partir de jauges de longue base de mesure. Une méthode développée au sein de l'équipe Dynamique, appliquée numériquement et expérimentalement, a également permis de localiser un défaut de masse et/ou de rigidité ainsi que de quantifier ces changements.

**Mots clés :** dynamique des structures, détection et localisation d'endommagements, analyse modale expérimentale, capteurs extensométriques.

## **Title : Which vibration sensors for health monitoring of mechanical structures ?**

**Summary :** The aim of the thesis is to define principles and approaches of a practical implementation of vibration sensors for dynamic monitoring of structures, specially damage detection. The general idea is to study the combinations instrumentation /detection method.

Thus, a numerical sensitivity study of different damage detection and localization methods using modal parameters (mainly natural frequencies and mode shapes) was performed according to the type of sensor used, to the number of sensors, to the severity of the damage, and to dispersion of modal parameters. The case-study is conducted on an aluminium clamped-clamped beam. A panorama of the capacity of each method for dynamic assessment of structures has been presented.

Overall, long base strain gauges provide better results for damage detection methods. A method developed in the Dynamic group applied to numerical and experimental data, is able to locate mass and /or flexural rigidity modifications and to quantify these perturbations.

**Key words :** structural dynamics, damage detection and localization, experimental modal analysis, strain sensors.

---

# Acronymes

<i>A-A</i> :	Appuyée - Appuyée.
<i>CF</i> :	Courbure de Flexibilité.
<i>CFO</i> :	Capteur à Fibre Optique.
<i>CL</i> :	Conditions aux Limites.
<i>CM</i> :	Courbure Modale.
<i>DDL</i> :	Degré De Liberté.
<i>ED</i> :	Energie de Déformation.
<i>E-E</i> :	Encastrée - Encastrée.
<i>EF</i> :	Elément Finis.
<i>E-L</i> :	Encastrée - Libre.
<i>ELB</i> :	Extensomètres à fibre optique Longue Base.
<i>ENPC</i> :	Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
<i>FRF</i> :	Fonction de Réponse en Fréquence.
<i>ITD</i> :	Ibrahim Time Domain.
<i>JLB</i> :	Jauges Longue Base.
<i>L-L</i> :	Libre - Libre.
<i>LSCE</i> :	Least Squares Complex Exponential.
<i>MAC</i> :	Modal Assurance Criterion.
<i>MIMO</i> :	Multi Input - Multi Output.
<i>MSE</i> :	Modal Strain Energy.
<i>POD</i> :	Proper Orthogonal Decomposition.
<i>POM</i> :	Proper Orthogonal Modes.
<i>PTV</i> :	Principe des Travaux Virtuels.
<i>SHM</i> :	Structural Health Monitoring.
<i>SIMO</i> :	Single Input - Multi Output.
<i>SISO</i> :	Single Input - Single Output.
<i>SOD</i> :	Smooth Orthogonal Decomposition.
<i>SNR</i> :	Signal Noise Ratio.
<i>TF</i> :	Transformée de Fourier.
<i>TO</i> :	Transformée en Ondelettes.





# Table des matières

<b>Acronymes</b>	<b>iii</b>
<b>1 Introduction Générale</b>	<b>1</b>
1.1 Contexte . . . . .	1
1.2 Classification des méthodes de détection d'endommagement . . . . .	2
1.3 Types de capteurs utilisés . . . . .	3
1.4 Plan de la thèse . . . . .	6
Bibliographie . . . . .	7
<b>2 Méthodes de détection et de localisation des endommagements</b>	<b>11</b>
2.1 Introduction . . . . .	13
2.2 Méthodes de détection usuelles . . . . .	13
2.2.1 Changement des fréquences propres . . . . .	13
2.2.2 Changement de l'amortissement . . . . .	16
2.2.3 Changement des déformées modales . . . . .	16
2.2.3.1 Déformées propres . . . . .	16
2.2.3.2 Méthode de flexibilité . . . . .	18
2.3 Méthodes des Indicateurs évolués . . . . .	19
2.3.1 Changement de courbure modale . . . . .	20
2.3.1.1 Utilisation de capteurs ponctuels « classiques » . . . . .	21
2.3.1.2 Utilisation d'extensomètres longue base . . . . .	22
2.3.2 Changement de courbure de flexibilité . . . . .	22
2.3.3 Méthode fondée sur l'énergie de déformation modale (MSE) . . . . .	23
2.4 Méthodes dans le domaine des fréquences : courbure de FRF . . . . .	26
2.4.1 Description théorique de la FRF . . . . .	27
2.4.2 Extension du MAC pour la Fonction de Réponse en Fréquence . . . . .	27
2.4.3 Détection de défaut par la courbure de FRF . . . . .	28
2.5 Méthode du filtrage modal . . . . .	30
2.6 Autres méthodes . . . . .	31
2.7 Méthodes développées dans l'équipe . . . . .	34
2.7.1 Méthode statistique fondée sur la SVD . . . . .	34
2.7.2 Méthode fondée sur la variation relative des fréquences . . . . .	35

2.8	Discussion sur la variabilité naturelle des paramètres modaux . . . . .	35
	Bibliographie . . . . .	37
<b>3</b>	<b>Optimisation du placement de capteurs</b>	<b>43</b>
3.1	Introduction . . . . .	45
3.2	Modèle du placement de capteurs . . . . .	45
3.3	Méthodes de placement des capteurs de vibrations . . . . .	46
3.3.1	Méthode basée sur l'énergie cinétique modale . . . . .	47
3.3.2	Effective independence method . . . . .	48
3.3.3	Optimum Driving Point (ODP) Based Method . . . . .	49
3.3.4	Non-Optimum Driving Point (NODP) based method . . . . .	49
3.3.5	La méthode de décomposition en QR . . . . .	49
3.3.6	L'algorithme MinMAC . . . . .	49
3.3.7	Rapport de décomposition en valeurs régulières (RDVS) . . . . .	50
3.3.8	Fonctions du placement optimal . . . . .	50
3.3.9	Applications dans la littérature . . . . .	52
3.4	Principes d'acquisition des déformées modales . . . . .	52
3.5	Conclusion . . . . .	56
	Bibliographie . . . . .	56
<b>4</b>	<b>Sensibilité des méthodes de détection d'endommagement</b>	<b>59</b>
4.1	Description de l'étude . . . . .	61
4.1.1	Modélisation de la poutre . . . . .	61
4.1.2	Modélisation du défaut . . . . .	62
4.2	Identification modale . . . . .	62
4.3	Paramètres de l'étude de sensibilité . . . . .	64
4.3.1	Type de capteur . . . . .	64
4.3.2	Dispersion des résultats . . . . .	64
4.3.3	Nombre de capteur . . . . .	64
4.4	Méthodes utilisant les paramètres modaux . . . . .	65
4.4.1	Evolution des fréquences propres avec le défaut . . . . .	65
4.4.2	Evolution des déformées modales avec le défaut . . . . .	66
4.4.3	MAC et COMAC . . . . .	69
4.4.4	Flexibilité . . . . .	70
4.5	Méthodes utilisant la courbure modale . . . . .	71
4.5.1	Courbure des déformées modales . . . . .	71
4.5.2	Courbure de flexibilité . . . . .	75
4.5.3	Energie de déformation . . . . .	77
4.5.4	Courbure de FRF . . . . .	80
4.5.4.1	Influence de l'intervalle de fréquences . . . . .	82
4.5.4.2	Influence du nombre de points de mesure . . . . .	82

4.5.4.3	Détection de défauts multiples . . . . .	82
4.6	Quantification . . . . .	84
4.7	Méthode du filtrage modal . . . . .	85
4.8	Etude de fiabilité par les probabilités . . . . .	87
4.8.1	Critère de classement . . . . .	88
4.8.2	Principe de l'étude . . . . .	89
4.8.3	Simulations avec ajout du bruit numérique sur les déformées modales . . . . .	89
4.9	Optimisation du placement des capteurs . . . . .	92
4.9.1	Application de la EI sur des données numériques . . . . .	95
4.9.2	Application de la fonction de type 1 . . . . .	96
4.9.3	Cas des ELB . . . . .	96
4.9.4	Comparaison Fonction objectif/EI . . . . .	97
4.9.5	Nombre optimal de capteurs selon Sazonov et al. [15] . . . . .	97
4.9.6	Placement optimal dans la détection d'endommagement . . . . .	98
4.10	Conclusion . . . . .	101
	Bibliographie . . . . .	102
<b>5</b>	<b>Nouvelles méthodes de détection d'endommagement</b>	<b>105</b>
5.1	Méthode fondée sur la SVD . . . . .	107
5.1.1	Définition de la SVD . . . . .	107
5.1.2	Identification modale par la SVD . . . . .	107
5.1.3	Technique de détection de défaut par la SVD . . . . .	107
5.1.4	Application sur des données numériques pour une poutre E-E . . . . .	109
5.1.4.1	Application de la SVD sur la matrice des modes propres . . . . .	110
5.1.4.2	Application de la SVD sur la matrice des courbures modales . . . . .	112
5.1.4.3	Application de la SVD sur les vecteurs propres des ELB . . . . .	112
5.1.4.4	Influence du nombre d'essais . . . . .	114
5.2	Méthode fondée sur les variations relatives des fréquences . . . . .	118
5.2.1	Estimation analytique de la variation des paramètres modaux . . . . .	118
5.2.2	Localisation pour une poutre avec $\Delta\mu(x)$ et $\Delta EI(x)$ . . . . .	120
5.2.3	Localisation pour une poutre avec $\Delta T$ , $\Delta\mu(x)$ et $\Delta EI(x)$ . . . . .	122
5.2.4	Application sur des données numériques de la poutre E-E . . . . .	123
5.2.4.1	Cas de défaut et paramètres modaux . . . . .	123
5.2.4.2	Localisation et quantification de la sévérité du défaut . . . . .	124
5.2.4.3	Quantification des modifications $\frac{\Delta EI \Delta L}{EIL}$ et $\frac{\Delta \mu \Delta L}{\mu L}$ . . . . .	126
5.2.4.4	Problème inverse . . . . .	129
5.2.4.5	Localisation du défaut avec prise en compte de $\Delta T$ , $\Delta\mu(x)$ et $\Delta EI(x)$ et quantification . . . . .	129
5.3	Conclusion . . . . .	133
	Bibliographie . . . . .	134

<b>6</b>	<b>Modèle EF pour le comportement vibratoire d'une poutre trouée</b>	<b>136</b>
6.1	Problème mécanique . . . . .	138
6.2	Modélisation d'un défaut dans une poutre . . . . .	138
6.3	Modélisation EF d'une poutre d'Euler-Bernoulli avec un trou . . . . .	141
6.3.1	Equation aux dérivées partielles . . . . .	141
6.3.2	Calcul de la section et du moment quadratique . . . . .	142
6.3.3	Fonctions de forme . . . . .	143
6.3.4	Construction des matrices élémentaires . . . . .	144
6.3.5	Calcul de $b(x)$ par interpolation de Lagrange . . . . .	146
6.4	Application numérique . . . . .	147
6.4.1	Description . . . . .	147
6.4.2	Matrices élémentaires . . . . .	148
6.4.3	Pertes de masse et de rigidité dues au trou . . . . .	149
6.4.4	Analyse modale . . . . .	150
6.5	Conclusion . . . . .	150
	Bibliographie . . . . .	150
<b>7</b>	<b>Etude expérimentale d'une poutre bi-encastree</b>	<b>152</b>
7.1	Description de l'expérience . . . . .	154
7.1.1	Identification du module d'élasticité . . . . .	154
7.1.2	Réalisation de l'encastrement . . . . .	155
7.1.3	Source d'excitation . . . . .	155
7.1.4	Description des capteurs . . . . .	156
7.1.5	Conditions d'acquisition des signaux . . . . .	158
7.1.6	Cas d'endommagement réalisés . . . . .	159
7.2	Évaluation du niveau des bruits parasites . . . . .	160
7.3	Nombre optimal de capteurs selon Sazonov et al. [2] . . . . .	161
7.4	Analyse modale expérimentale de la poutre E-E saine . . . . .	162
7.4.1	Analyse spectrale et étude de dispersion . . . . .	162
7.4.2	Identification modale par la TO, COSMAD et la SOD . . . . .	164
7.4.2.1	Identification modale par la TO . . . . .	164
7.4.2.2	SOD (Smooth Orthogonal Decomposition) . . . . .	165
7.4.2.3	Identification modale par COSMAD . . . . .	166
7.4.2.4	Choix de la méthode d'identification . . . . .	168
7.5	Interprétation des résultats obtenus par la TO . . . . .	169
7.6	Détection d'endommagement par les méthodes utilisant les paramètres modaux . . . . .	175
7.7	Détection d'endommagement par les méthodes utilisant la courbure modale . . . . .	178
7.7.1	Courbure modale . . . . .	179
7.7.2	Courbure de Flexibilité . . . . .	179
7.7.3	Energie de déformation modale . . . . .	180
7.7.4	Etude mode par mode . . . . .	180

7.8	Détection d'une modification structurale à partir du filtrage modal . . . . .	182
7.8.1	Détection à partir d'une série d'essais sur la poutre saine . . . . .	184
7.8.2	Détection à partir d'une série d'essais de l'état sain et des états endommagés . . . . .	184
7.9	Application de méthodes fondées sur la courbure de TF . . . . .	185
7.10	Conclusion . . . . .	187
	Bibliographie . . . . .	188
<b>8</b>	<b>Analyse vibratoire par corrélation d'images</b>	<b>191</b>
8.1	Principe général de la corrélation d'images . . . . .	193
8.2	Contexte bibliographique . . . . .	195
8.3	Le traitement numérique des images . . . . .	199
8.3.1	Les pixels d'une image . . . . .	199
8.3.2	Mesure de détérioration entre deux images . . . . .	199
8.3.3	Filtrage d'images . . . . .	199
8.3.4	Coefficient de corrélation de signaux . . . . .	200
8.3.5	Interpolation . . . . .	200
8.4	Mise en œuvre expérimentale . . . . .	201
8.4.1	Matériel à disposition . . . . .	202
8.4.2	Qualité du mouchetis . . . . .	203
8.4.3	Qualité de l'image . . . . .	205
8.4.4	Bruit d'images . . . . .	205
8.5	Mesure de déplacement obtenue à l'aide de la caméra rapide . . . . .	206
8.6	Influence des paramètres . . . . .	207
8.6.1	Influence du choix du nombre de points . . . . .	208
8.6.2	Influence de la région d'étude . . . . .	208
8.7	Analyse modale et détection de défaut par corrélation d'images . . . . .	209
8.8	Confrontation Numérique-Expérience . . . . .	211
8.9	Conclusion . . . . .	215
	Bibliographie . . . . .	215
<b>9</b>	<b>Etude expérimentale des méthodes développées dans l'équipe</b>	<b>217</b>
9.1	Détection et localisation par la méthode utilisant la SVD . . . . .	219
9.1.1	Application de la SVD sur les fréquences propres . . . . .	219
9.1.2	Application sur les déformées modales des accéléromètres . . . . .	220
9.1.3	Application sur les déformées modales des JLB . . . . .	221
9.2	Détection par la méthode fondée sur les variations relatives des fréquences . . . . .	226
9.2.1	Recalage analytique-expérimentale . . . . .	226
9.2.2	Localisation du trou : poutre avec $\Delta EI(x)$ et $\Delta \mu(x)$ pris en compte . . . . .	229
9.2.3	Localisation d'une masse ajoutée . . . . .	230
9.3	Conclusion . . . . .	234
	Bibliographie . . . . .	234

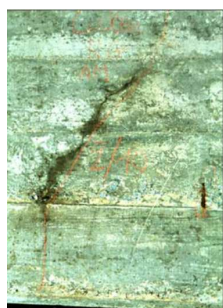
<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>236</b>
<b>Annexes</b>	<b>239</b>
<b>A Réponse impulsionnelle d'une poutre instrumentée par différents types de capteurs</b>	<b>240</b>
A.0.1 Capteurs ponctuels : déplacement, vitesse, accélération . . . . .	240
A.0.2 Capteur longue base : ELB ou JLB . . . . .	242
A.0.3 Obtention des déformées modales à partir des JLB . . . . .	244
<b>B Simulation de Monte-Carlo</b>	<b>247</b>
<b>C Transformées en Ondelettes Continues</b>	<b>250</b>
C.1 Application aux signaux modulés en fréquence . . . . .	250
C.1.1 Base théorique . . . . .	250
C.1.2 TOC de signaux modulés en fréquence et caractérisation d'arêtes . . . . .	252
C.2 Identification modale des systèmes mécaniques linéaires . . . . .	254
C.2.1 Réponses libres des systèmes amortis à plusieurs degrés de liberté . . . . .	254
C.2.2 Relation entre les données mesurées et les paramètres modaux . . . . .	255
C.3 Aspects pratiques de la TOC . . . . .	256
C.3.1 Ondelette mère . . . . .	256
C.3.2 Effet de bords . . . . .	258
C.3.3 Découplage des modes : choix du paramètre de l'ondelette mère . . . . .	260
<b>D Méthode des sous-espaces</b>	<b>263</b>
<b>E Comparaison numérique-expérience et recalage</b>	<b>266</b>
<b>F Résultats expérimentaux issus de la SVD pour les différents états endommagés de la poutre E-E</b>	<b>271</b>
<b>Résumés</b>	<b>277</b>
<b>Table des figures</b>	<b>287</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>290</b>

# Chapitre 1

## Introduction Générale

### 1.1 Contexte

Un endommagement en génie civil (ou génie mécanique) se caractérise par l'apparition de déformations permanentes dans un élément de structure et la diminution de la rigidité des matériaux (Fig. 1.1). Ceci conduit à une dégradation du comportement physique de la structure pouvant conduire à une rupture. Ces endommagements, reliés aux conditions d'exploitation de l'ouvrage, dépendent principalement des sollicitations externes (passage de poids lourds, impact avec la structure, etc.) et de l'environnement de l'ouvrage (présence d'agents agressifs, cycles de gel-dégel, niveau d'humidité et de température, vent et séisme etc.)



(a) Fissuration d'une poutre en béton armé



(b) Fissuration d'une poutre et écartement du béton



(c) Trous dans une poutre en béton

**FIGURE 1.1 – Cas d'endommagements sur des poutres d'ouvrages d'art**

Le suivi de l'état des ouvrages de génie civil ou le contrôle de santé des structures, plus couramment désigné par le sigle anglais SHM (Structural Health Monitoring) est devenu au cours des dernières années un enjeu important [1][2]. Des ponts à longue portée ont été construits dans les années cinquante et conçus pour avoir une durée de vie de 40 à 50 ans comme le pont d'Arvida au Canada. Les effondrements et les détériorations de ces structures entraînent dans le monde entier des préoccupations concernant l'intégrité structurale, la durabilité et la fiabilité, c'est-à-dire l'état de santé d'une structure. C'est pourquoi ce sujet a fait et fait encore l'objet de nombreuses recherches depuis plusieurs décennies.



Il existe beaucoup de méthodes d'évaluation de l'endommagement : les méthodes vibratoires, les méthodes acoustiques (méthodes ultrasoniques) [3, 4], les méthodes de champ magnétique, la radiographie, les méthodes de champ thermique etc. Plusieurs articles de synthèse bibliographique ont été publiés sur le sujet [5, 35, 7, 8, 9].

Les méthodes fondées sur l'émission acoustique [10], par exemple, consistent à analyser la libération d'énergie sous forme d'ondes élastiques au sein du matériau lorsque ce dernier s'endommage. Chou et al. [11] ont utilisé cette technique pour discriminer des phénomènes de ruptures de fibre, de microfissuration intralaminare, de macrofissuration intralaminare ainsi que du microdélaminage au sein de composites stratifiés unidirectionnels orientés. Cette méthode a déjà fait ses preuves lorsque le phénomène de rupture de fibres est très prépondérant présent lors de l'endommagement de la structure [12]. Dans [13], l'auteur a étudié le processus d'endommagement des roches par des mesures d'activités acoustiques.

Dans cette thèse, nous nous limitons aux méthodes utilisant les réponses vibratoires de la structure. Plusieurs méthodes non-destructives ont été proposées dans la littérature. L'idée de base réside dans le fait que les paramètres modaux mesurés (fréquences propres, amortissements modaux et déformées modales) dépendent des propriétés physiques de la structure (rigidité, masse, amortissement). De ce fait, les modifications pouvant intervenir sur les propriétés physiques ou mécaniques entre un état sain et un état endommagé doivent être détectables au travers des changements des paramètres modaux .

## 1.2 Classification des méthodes de détection d'endommagement

Doebbling et al. [14], entre autres, ont fourni une recherche bibliographique importante sur les méthodes de détection de défauts par méthode vibratoire et leur application sur les structures en génie civil. En général, une distinction est faite entre comportement linéaire et non linéaire. Dans la majorité des travaux de littérature, il est supposé un comportement linéaire du matériau. Les changements des caractéristiques modales proviennent d'un changement dans la géométrie, des conditions aux limites (CL) et/ou des propriétés du matériau de la structure et la réponse de la structure peut toujours être modélisée en utilisant les équations linéaires du mouvement. Le défaut est considéré comme non linéaire lorsque la structure élastique linéaire se comporte de manière non linéaire après l'occurrence du défaut. La formation d'une fissure de fatigue qui s'ouvre et se ferme selon les conditions climatiques (Fig. 1.2) est un exemple d'endommagement non linéaire.

Les méthodes linéaires sont ensuite classées en deux catégories suivant qu'elles soient basées sur un modèle (MBM) ou non-basées sur un modèle (MNBm). Les MNBm considèrent que la structure répond d'une manière prédéterminée et peut donc être modélisée, par éléments finis par exemple.

Les MNBm localisent le défaut sans un modèle détaillé de la structure et se fondent, par exemple, sur le changement des fréquences propres [6, 11], des modes propres [21] et de leur dérivées [42] ou sur un changement des matrices de flexibilité [37] obtenues à partir des modes propres et des fréquences propres mesurées.

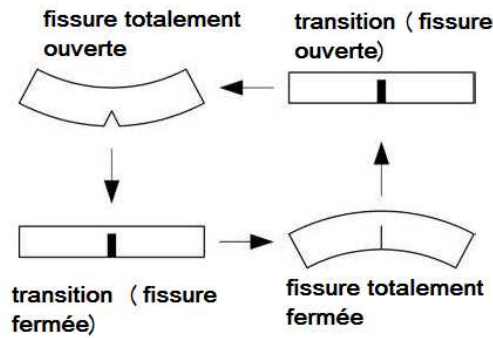


FIGURE 1.2 – Comportement non linéaire d’une poutre avec une fissure au centre

Rytter [20] a proposé de classer les méthodes de détection d’endommagement en quatre niveaux, suivant le niveau d’information qu’elles fournissent par rapport à l’endommagement :

- Niveau 1 : Détermination de la présence d’un endommagement
- Niveau 2 : Localisation d’un endommagement
- Niveau 3 : Quantification de la sévérité d’un endommagement
- Niveau 4 : Prédiction de la durée de vie résiduelle

Les travaux issus de la bibliographie peuvent être classés pour la plupart comme relevant des niveaux 1,2 ou 3. Le dernier niveau traite fiabilité des ouvrages. Un autre type de classification des méthodes de détection de défauts existe. C’est différencier les méthodes utilisées pour la surveillance continue de l’état de performances des structures de celles appliquées pour la détection des endommagements causés par des événements extrêmes (séismes).

Le type d’excitation, les conditions de mesure ainsi que le type de capteurs et leur placement sur la structure sont des paramètres importants qui affectent la fiabilité de la détection des défauts et le SHM de la structure.

## 1.3 Types de capteurs utilisés

Il existe de nombreux types de capteurs : les capteurs ponctuels « classiques » (capteurs de déplacement, de vitesse, accéléromètres), les capteurs de déformation (jauges ponctuelles, extensomètres longue base à fibre optique ou jauge), les capteurs sans contact (vélocimètre, capteur de déplacement laser, caméra rapide) etc. Les systèmes d’acquisition modernes en dynamique des structures n’ont réellement commencé qu’avec l’apparition des accéléromètres dans les années 50. Ces derniers sont aujourd’hui majoritairement employés dans les mesures de vibrations.

Des techniques, dérivant de la mesure des déformations locales au moyen de jauges résistives ou piézo-électriques, ont été proposées par D’Ambrogio et Sestieri [21]. Cependant, l’utilisation de ce type de capteurs dans le cadre de l’analyse modale et de la modification structurale reste peu déve-

loppée, alors que dans d'autres domaines ils sont plus largement répandus. Par exemple, l'utilisation de jauges résistives est courante dans les problèmes liés à la fatigue, ou encore au fluage.

En 1992, dans [22, 23], les chercheurs ont constaté que l'analyse modale des déformations est plus sensible pour identifier des modifications structurales (fissures) que celles obtenues par des accéléromètres. En 1994, D.R. Perchard et A.S.J. Swamidas [24] ont également effectué des mesures d'accéléromètres et de jauges de déformation sur une poutre E-L comportant une encoche. Ils ont trouvé que les changements des fréquences propres ne correspondent pas aux prédictions EF, mais les FRF issues des signaux de déformations mesurés par les jauges sont très sensibles aux endommagements. Chen et al. [26] sont également parvenus aux mêmes conclusions. Des jauges de déformation ont été encore utilisées dans [25] pour déterminer directement la courbure modale au lieu des accéléromètres habituellement employés et une amélioration des résultats a été constatée. J. Chance et al. [27] ont montré que le calcul de la courbure modale obtenue par différence finie centrée pour une poutre fissurée peut aboutir à des erreurs inacceptables. Ils ont trouvé que les accéléromètres et les capteurs de déplacement n'ont pas pu permettre de localiser la fissure dans une poutre. Avec l'utilisation des déformations obtenues par des jauges de 5cm de longueur, les résultats furent satisfaisants. Ils ont donc conclu que les courbures modales peuvent localiser une fissure avec précision.

A. Budipriyanto et A.S.J. Swamidas [28] ont utilisé la moyenne quadratique (ou Root Mean Square RMS) des réponses mesurées sur une plaque fissurée de dimension 600 mm × 600 mm. Les mesures ont été faites avec des accéléromètres et des jauges de déformation. Cette méthode de détection a permis de détecter des fissures de 10 mm de longueur avec les deux types de capteurs et puis de quantifier leur taille.

F. Bastianini et al. [29] ont démontré que la distribution de la déformation mesurée par une fibre optique sur le long d'un pont permet de localiser une fissure. Une discontinuité apparaît à la position réelle de la fissure (Fig. 1.5).

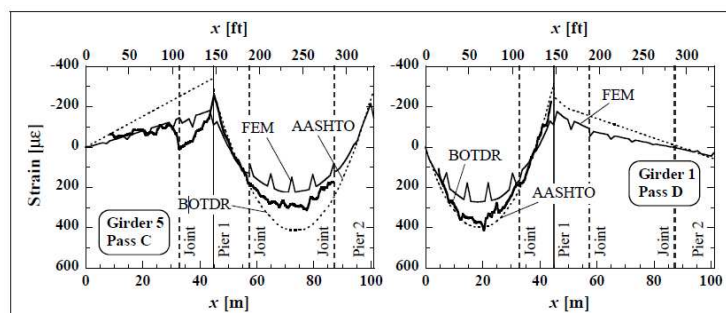


FIGURE 1.3 – Distribution de déformations mesurées le long du tablier du pont A6358 aux Etats Unis [29]

De nos jours, les capteurs à fibre optique (CFO) sont devenus un outil incontournable du SHM [30]. G. Cumunel [31] a explicité dans sa thèse les mesures analytiques et expérimentales d'Extensomètres Longue Base (ELB) appliquées aux poutres d'Euler Bernoulli. Il a étudié l'influence de leur placement et leur longueur sur les mesures vibratoires. Il a mis en avant le fait que les déformées modales obtenues à partir de la mesure des ELB ne sont pas les mêmes que celles obtenues avec des capteurs ponctuels classiques (déplacement, vitesse et accélération). En effet, ces derniers permettent d'obtenir

les déformées modales  $\phi_k(x)$  tandis que les ELB mesurent l'intégrale de la courbure modale entre les bornes du capteur  $\int_a^b \phi_k''(x)dx$ . En ce qui concerne les caractéristiques fréquentielles, la mesure des ELB possède les mêmes caractéristiques qu'une mesure de déplacement, à savoir qu'elle privilégie les basses fréquences comme tout capteur extensométrique.

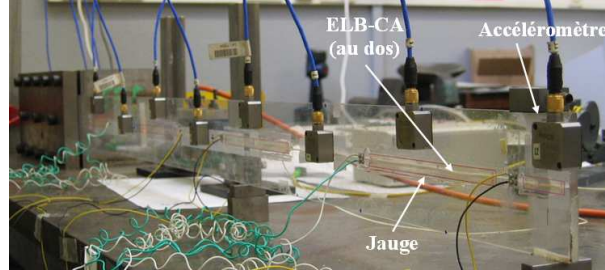


FIGURE 1.4 – Photos d'une poutre console instrumentée par des accéléromètres, des ELB et des jauges [31].

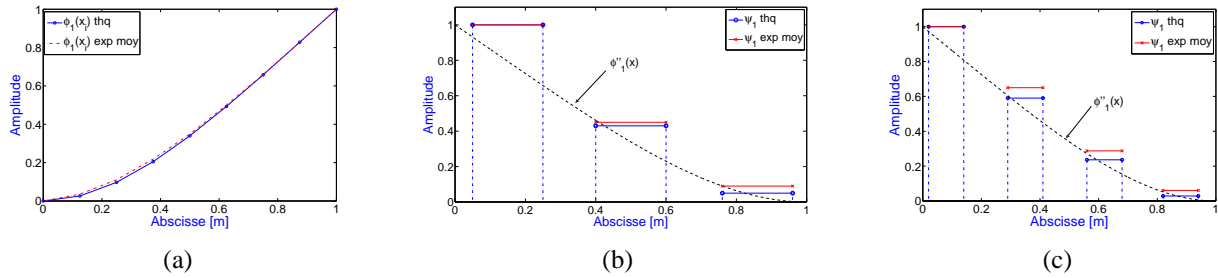


FIGURE 1.5 – Vecteurs propres obtenus à partir des signaux des accéléromètres (a), des ELB (b) et des jauges (c) [32].

Le tableau 1.1 répertorie les résultats de détection d'endommagement obtenus dans douze articles. Le signe (+) indique que la méthode a fourni des résultats de détection et de localisation satisfaisants, le (-) indiquant par conséquent le contraire.

Ainsi, l'information récupérée de signaux de mesure va dépendre du type, du placement et du nombre des capteurs utilisés. Même s'il est possible de disposer d'un grand nombre de points de mesure, il reste que le positionnement des capteurs doit être judicieux. Dans le SHM, une détection fiable d'endommagement nécessite une installation optimale des capteurs. Le placement de ces derniers est essentiel pour la quantification des endommagements. En termes de technologie de capteurs, d'algorithmes de détection et d'optimisation déterministe du placement des capteurs, différentes recherches ont été menées afin de suivre l'état de performance des structures. Généralement, plus le nombre de capteurs sur la structure est élevé, plus l'information du comportement dynamique de la structure est performante [14, 3, 4].

L'objectif principal du travail présenté dans ce mémoire de thèse consiste donc à approfondir l'étude sur le type de capteur à utiliser en fonction des méthodes de détection d'endommagements pour la surveillance de santé des structures.

Article	Application	Capteurs	Nombre/Placement	Méthode	Résultats
Chance et al. [27]	Poutre	Accéléromètres Capteur de Déplacement Jauges de déformation	Non signalé / Répartis	Courbure Courbure Déformation	D- L- D- L- D+ L+
Chen et al. [26]	Plaque	Accéléromètres Jauges de déformation	Non signalé / Répartis 1 / Optimal	FRF FRF/Vecteurs propres	D- L- D+ L+/D+ L+
Perchard et al. [24]	Plaque Cantilever	Accéléromètres Jauges de déformation	6 / Répartis 1 / Optimal	Déformée Modale FRF	D+ L+ D+ L-
Farrar et al [40]	Pont	Accéléromètres	11/Répartis	Courbure Modale Flexibilité Energie de déformation	D+ L- D- L- D+ L+
Cornwell et al. [37]	Plaque	Accéléromètres	31 / Répartis	Energie de déformation	D+ L+
Alvandi et al.[35]	Pont	Accéléromètres	3 / Répartis	Courbure Modale Flexibilité Energie de déformation	D+ L- D+ L- D+ L+
Poudel et al. [14]	Poutre	Caméra	/	TO	D+ L-
Bastianini et al. [29]	Pont	Fibre optique	1 / Optimal	Déformation	D+ L+
Douka et al. [41]	Poutre	Accéléromètres	2 / Répartis	TO du mode propre	D+ L+
Milisen et al. [38]	Machine tournante	Accéléromètres	Non signalé / Optimal	FRF TO SVD sur la TO	D+ L- D- L- D+ L-
Wang et al. [39]	Steel frame	Accéléromètres	4 / Répartis	Local Damage Factor (LDF)	D+ L-
Budipriyanto et al.[28]	Plaque	Accéléromètres Jauges de déformation	6 / Optimal 5 / Optimal	RMS RMS	D+ L- D+ L-

**TABLEAU 1.1 – Synthèse de la performance des méthodes de détection tirée de la littérature : « D » pour Détection et « L » pour Localisation**

## 1.4 Plan de la thèse

L'étude présentée dans cette thèse porte particulièrement sur l'analyse des paramètres modaux pour la détection d'endommagements appliquées aux poutres. La comparaison de paramètres recueillis à des états distincts de la vie de la poutre peut permettre de comparer la rigidité et la masse entre ces deux états.

Le mémoire est composé de *neuf Chapitres*. Les deux premiers chapitres sont des études bibliographiques. *Le deuxième Chapitre* présente les principales méthodes de détection d'endommagement utilisées dans la littérature et dans ce mémoire afin de détecter et localiser un endommagement dans une structure en fonction de différents paramètres, ce qui est l'un des principaux objectifs de la thèse. Dans *le troisième Chapitre*, le concept de placement optimal des capteurs de vibration utilisés dans le SHM est introduit et quelques méthodes sont présentées.

Les études numériques sont ensuite regroupées dans *trois Chapitres*. *Le quatrième Chapitre* est consacré à l'étude numérique d'une poutre comportant une entaille. Les simulations montrent les performances de quelques techniques de détection en analysant la sensibilité de différents paramètres : type de capteurs, sévérité de l'endommagement, bruit de mesure etc. L'objectif principal de ce chapitre est de montrer avec quelle méthode et quel type de capteur les résultats de détection et de localisation d'un défaut peuvent s'améliorer. Le chapitre est clos par une étude de probabilité de détection d'endommagements, la loi de probabilité portant sur la dispersion des paramètres utilisés par les différentes méthodes.

*Le Chapitre 5* présente deux nouvelles méthodes de détection développées dans l'équipe Dynamique du Laboratoire Navier de l'ENPC. La première est fondée sur la SVD qui est appliquée sur une matrice comprenant les paramètres modaux d'une structure à différents instants. Il a été proposé d'utiliser

cet outil pour détecter le changement dû à l'endommagement, qui reste permanent après l'apparition du défaut et puis le localiser. La seconde méthode explicite une relation entre les paramètres modaux et les propriétés physiques (masse, raideur) d'une structure et utilise les variations relatives des fréquences propres pour localiser un endommagement. Le concept de chacune des méthodes est détaillé, puis la performance de ces techniques est étudiée numériquement afin d'appréhender leur capacité à détecter et localiser des endommagements.

Dans *le sixième Chapitre*, nous nous sommes intéressés au modèle vibratoire d'une poutre de type Euler-Bernoulli comportant un trou au lieu d'une entaille qui est généralement utilisée dans la littérature. Cette étude a été réalisée afin de faire le lien avec la partie expérimentale des chapitres suivants. L'estimation de la rigidité et de la masse d'un modèle éléments finis (EF) d'une poutre est présentée en construisant les matrices élémentaires de masse et de raideur.

Ensuite, les travaux expérimentaux sont également articulés autour de *trois Chapitres*. *Le Chapitre 7* présente l'analyse des mesures de vibrations libres réalisées sur une poutre en aluminium encastree-encastree étudiée au sein du laboratoire. La poutre a été instrumentée par différents capteurs : onze accéléromètres, dix jauges longue base (JLB), onze jauges ponctuelles (JP), et une caméra rapide. Pour les différents états, à l'état sain et aux états endommagés (avec un trou), elle est soumise à des chocs impulsionnels. Les dispersions des paramètres modaux identifiés par la transformée en ondelette (TO) pour ces essais sont déterminées, puis les méthodes de détection et de localisation d'endommagement implémentées dans le Chapitre 4 sont appliquées au travers des essais répétables.

L'analyse par corrélation d'images est abordée dans *le huitième Chapitre*. Les images des essais sur la poutre prises par la caméra rapide sont traitées par le logiciel CMV développé par Michel Bornert<sup>1</sup>. La description de la technique de corrélation d'images est suivie d'un bref rappel bibliographique sur ce sujet. L'impact des paramètres modifiables dans le logiciel est ensuite abordé, puis l'identification modale à partir du signal de déplacement issu de la corrélation d'images et l'application de quelques méthodes de détection de défaut sont réalisées.

*Le neuvième et dernier Chapitre* se focalise sur la détection et la localisation du trou dans la poutre par les deux méthodes originales développées au sein de l'équipe. Dans un premier temps, la SVD est appliquée sur les essais de la poutre pour différents cas d'endommagement. Dans un second temps, le chapitre présente les résultats de localisation du trou obtenus par la méthode fondée sur les variations relatives des fréquences propres. Des conclusions significatives achèveront le chapitre.

Enfin, le manuscrit s'achève par une conclusion synthétisant les principaux résultats issus de ces travaux et les nombreuses perspectives de recherche envisageables suite à cette étude.

---

1. Responsable de l'équipe Multi-échelles du Laboratoire Navier

# Bibliographie

- [1] Balageas D., Fritzen C. P., Gumes A., *Structural health monitoring*, ISTE, London, UK, 2006.
- [2] Bellino A., Marchesiello S., Garibaldi L., *Experimental dynamic analysis of nonlinear beams under moving loads* Shock and vibration, 19, pp. 969-978, 2012.
- [3] Abraham O., Zhang Y., Chapeleau X., Durand O., Tournat V., *Monitoring of a large cracked concrete sample with non-Linear mixing of ultrasonic coda waves*, 7<sup>th</sup> European Workshop on Structural Health Monitoring, 2014.
- [4] Abraham O., Popovics S., Cottineau L.-M., Durand O., *Laser ultrasonics for civil engineering : some applications in development for concrete non destructive testing*, Journal of Physics Conference Series, 278(1), 2014.
- [5] Broda D., Staszewski W.J., Martowicz A., Uhl T., Silbershmidt V.V, *Modelling of nonlinear crack-wave interactions for damage detection based on ultrasound :a review*, Journal of Sound and Vibration, 333(4), pp. 1097-1118, 2014
- [6] Salawu O.S., *Modelling of nonlinear crack-wave interactions for damage detection based on ultrasound :a review*, Journal of Sound and Vibration, 19(9), pp. 718-723, 1997.
- [7] Doebling W. , Farrar C. R. , Prime M.B. *A Summary Review of Vibration-Based Damage Identification Methods*, The Shock and Vibration Digest, 30, pp. 91-105, 1998.
- [8] Sposito G., C. Warda, Cawley P., Nagya P.B., Scrubya C., *A review of non-destructive techniques for the detection of creep damage in power plant steels*, NDT & E International, 43(7), pp. 555-567, 2010.
- [9] Sinou J.-J., *A review of damage detection and health monitoring of mechanical systems from changes in the measurement of linear and non-linear vibrations*, Mechanical Vibrations : Measurement, Effects and Control, pp.643-702, 2009.
- [10] Valentin D., Bunsell A.R., *A study of damage accumulation in carbon fibre reinforced epoxy resin structures during mechanical loading monitored By Acoustic Emission*, Journal of Plastics and Composites, Vol.1, pp.314-334, 1982.
- [11] Chou H.Y., Zejli H., Thionnet A., Bunsell A., Mouritz A., Bannister M., *Détection et discrimination par émission acoustique des endommagements dans les composites. Comparaison expérience /modélisation*, AMAC. 17<sup>èmes</sup> Journées Nationales sur les Composites (JNC17), Poitiers-Futuroscope, France, 2011.

- [12] Blassiau S., *Modélisation des phénomènes microstructuraux au sein d'un composite unidirectionnel carbone/époxy et prédiction de durée de vie : contrôle et qualification de réservoirs bobinés*, Thèse, Ecole des Mines de Paris, 2005.
- [13] Wassermann J., *Etude expérimentale de l'endommagement des roches par des méthodes acoustiques*, Thèse, Ecole Nationale Supérieure de Géologie de Nancy, 2006.
- [14] Doebling SW., Farrar CR., Prime M.B., Shevitz D.W., *Damage identification and health monitoring on structural and mechanical systems from changes in their vibration characteristics : a literature review*, Report LA-13070-MS, Los Alamos National Laboratory, USA, 1996.
- [15] Hearn G., Testa R., *Modal analysis for damage detection in structures*, Journal of Structural Engineering, 117(10), pp. 3042-3062, 1991.
- [16] Behtani A., Bouazzouni A., *Localisation de défauts dans les structures poutres stratifiées basée sur des données modales*, 20<sup>ème</sup> Congrès Français de Mécanique, Besançon, 2011.
- [17] Biswas M., Pandey A.K., Samman M.M., *Diagnostic experimental analysis of a highway bridge*, International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis, 5(1), pp.33-42, 1989.
- [18] Pandey A.K., Biswas M., Samman M.M., *Damage detection from changes in curvature mode shapes*, Journal of Sound and Vibration, 145(2), pp. 321-332. 1991.
- [19] Zhang Z., Aktan, A., *The damage indices for constructed facilities*, IMAC 13, 1, pp. 1520-1529, 1995.
- [20] Rytter A., *Vibration based inspection of civil engineering structures*, Thèse, Université d'Aalborg, Denmark, 1993.
- [21] D'Ambrogio W., Sestieri A. *Models for accounting /eliminating rotational dofs in distributed structural modification*, IMAC 17, pp. 220-226, 1999.
- [22] Debaio L., Zhaochang Z., Ke H. Bo W., *Damage detection in offshore structures by the FRF method*, OMAE, Calgary, Canada, Vol.1, Part B, pp. 601-604, 1992.
- [23] Swamis A.S.J., Chen Y., *Damage detection in a tripod tower platform (TTP) using modal analysis*, OMAE, Calgary, Canada, Vol.1, Part B, pp. 577-583, 1992.
- [24] Perchard D.R., Swamidas A.S.J., *Crack detection in slender cantilever plates using modal analysis*, IMAC 12, pp. 1769-1777, 1994.
- [25] Park H., Jung H.S., Kwon Y.H., Seo J.H., *Mathematical models for assessment of the safety of steel beams based on average strains from long gage optic sensors*, Sensors and Actuators A :Physical-Journal - Elsevier, 125(2), pp. 109-113, 2006.
- [26] Chen Y., Swamidas A.S.J., *Dynamic characteristics and modal parameters of a plate with a small growing surface crack*, IMAC 12, pp. 1769-1777, 1994.
- [27] Chance J., Tomlinson G.R., Worden K., *A simplified approach to the numerical and experimental modeling of the dynamics of a cracked beam*, IMAC 12, pp. 1155-1161, 1994.
- [28] Budipriyanto A., Swamidas A.S.J., *Crack identification in a cross-stiffened plate system using the root mean square of time domain responses*, Canadian Journal of Civil Engineering, 33(8), pp. 989-1004, 2011.



- 
- [29] Bastianini F., Matta F., Rizzo A., Galati N., Nanni A., *Overview of recent bridge monitoring applications using distributed brillouin fiber optic sensors*, Journal of Non destructive Testing, 12(9), 269-276, 2006.
- [30] Li H.N., Li D.S., Song G.B., *Recent application of fiber optic sensors to health monitoring in civil engineering*, Engineering Structures, 26, pp. 1647-1657, 2004.
- [31] Cumunel G., *Extensomètres à fibre optique Longue Base (ELB) pour l'évaluation dynamique des structures*, Thèse, École Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, France, 2008.
- [32] Cumunel G., Delepine-Lesoillea S., Argoul P., *Long-gage optical fiber extensometers for dynamic evaluation of structures*, Sensors and Actuators A : Physical, 184, pp. 1-15, 2012.
- [33] Liu X., Cai J., Liu H., *Bridge damage diagnosis*, China Communications Press, Beijing, China, 2002.
- [34] Shulte R.T., *Optimal sensor placement for damage identification-an efficient forward-backward selection algorithm*, EWSHM 3, Granada, Espagne, pp. 1151-1159, 2006.
- [35] Alvandi A., *Contribution à l'utilisation pratique de l'évaluation dynamique pour la detection d'endommagements dans les ponts*, Thèse, ENPC, 2003.
- [36] Poudel P.U., Fu G., Ye J., *Structural damage detection using digital video imaging and wavelet transformation*, Journal of Sound and Vibration, 286(4-5), pp. 869-895, 2005.
- [37] Cornwell P., Doebling S.W., Farrar C.R., *Application of the strain energy damage detection method to plate-like structures*, Journal of Sound and Vibration, 224 (2), pp. 359-374, 1999.
- [38] Milisen X., Lenarts V., *Comparaison de différentes méthodes de détection de défauts dans les roulements*, Revue Scientifique des ISILF n°20, 2006.
- [39] Wang S., Ren Q., Qiao P., *Structural damage detection using local damage factor*, Journal of Vibration and Control, 12(9) pp. 955-973, 2006.
- [40] Jauregui D.V., Farrar C.R., *Comparison of damage identification algorithms on experimental modal data from a bridge*, IMAC 14, pp. 1423-1429, 1996.
- [41] Douka E., Loutridis S., Trochidis A., *Crack identification in beams using wavelet analysis*, International Journal of Solids and Structures Vol. 40, pp. 3557-3569, 2003.

## Chapitre 2

# Méthodes de détection et de localisation des endommagements

---

**C**E CHAPITRE est consacré à l'état de l'art des différentes méthodes vibratoires de détection et de localisation d'endommagements utilisées dans la littérature. Nous nous sommes plus particulièrement intéressés aux méthodes utilisant les paramètres modaux pour détecter des endommagements. L'idée de base réside dans le fait que les paramètres modaux mesurés dépendent des propriétés physiques de la structure (rigidité, masse, amortissement). Nous allons détailler le principe des méthodes classiques fondées sur les déformées modales et les courbures modales, les méthodes utilisant la matrice de flexibilité ainsi que la méthode fondée sur l'énergie de déformation modale. Nous présentons également les méthodes utilisant les FRFs (courbure de FRF, filtrage modal). De plus, deux nouvelles méthodes développées dans l'équipe Dynamique seront abordées dans le présent chapitre et détaillées dans le chapitre 5.

---

**Plan du Chapitre 2**

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction . . . . .</b>	<b>13</b>
<b>2.2</b>	<b>Méthodes de détection usuelles . . . . .</b>	<b>13</b>
2.2.1	Changement des fréquences propres . . . . .	13
2.2.2	Changement de l'amortissement . . . . .	16
2.2.3	Changement des déformées modales . . . . .	16
<b>2.3</b>	<b>Méthodes des Indicateurs évolués . . . . .</b>	<b>19</b>
2.3.1	Changement de courbure modale . . . . .	20
2.3.2	Changement de courbure de flexibilité . . . . .	22
2.3.3	Méthode fondée sur l'énergie de déformation modale (MSE) . . . . .	23
<b>2.4</b>	<b>Méthodes dans le domaine des fréquences : courbure de FRF . . . . .</b>	<b>26</b>
2.4.1	Description théorique de la FRF . . . . .	27
2.4.2	Extension du MAC pour la Fonction de Réponse en Fréquence . . . . .	27
2.4.3	Détection de défaut par la courbure de FRF . . . . .	28
<b>2.5</b>	<b>Méthode du filtrage modal . . . . .</b>	<b>30</b>
<b>2.6</b>	<b>Autres méthodes . . . . .</b>	<b>31</b>
<b>2.7</b>	<b>Méthodes développées dans l'équipe . . . . .</b>	<b>34</b>
2.7.1	Méthode statistique fondée sur la SVD . . . . .	34
2.7.2	Méthode fondée sur la variation relative des fréquences . . . . .	35
<b>2.8</b>	<b>Discussion sur la variabilité naturelle des paramètres modaux . . . . .</b>	<b>35</b>
	<b>Bibliographie . . . . .</b>	<b>37</b>

---

## 2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons présenter quelques méthodes de détection d'endommagements qui ont été utilisées dans la littérature et au cours de la thèse. Les modifications pouvant intervenir sur les propriétés physiques ou mécaniques d'une structure doivent être détectables au travers des changements des paramètres modaux entre un état sain et un état endommagé. En effet, les modes propres et les fréquences propres sont des propriétés intrinsèques des structures linéaires avant et après endommagement et sont reliées au comportement dynamique de ces dernières. Elles dépendent notamment de la masse et de la rigidité de la structure.

## 2.2 Méthodes de détection usuelles

Les méthodes classiques utilisent directement le changement des caractéristiques modales (fréquences propres, amortissements modaux et déformées modales) afin de détecter et de localiser un endommagement dans une structure.

### 2.2.1 Changement des fréquences propres

Différentes applications sont reportées dans la littérature sur les techniques de détection fondées sur les changements des fréquences propres par les chercheurs Williams et Salawu [1], Sikorsky et Stubbs [2], Farrar et Jauregai [3]. Cette approche repose sur l'hypothèse que les fréquences sont des indicateurs sensibles, les modifications des propriétés structurales causant des changements des fréquences propres de la structure. Une analyse périodique des fréquences semble constituer a priori une méthode de surveillance structurale. Selon Doebling et al.[4], le premier article qui a proposé l'utilisation des paramètres modaux pour détecter les défauts a été rédigé par Lifshitz et Rotem [5]. L'équation différentielle matricielle sans second membre d'une structure discrétisée, par EF par exemple, est donnée par :

$$M\ddot{Y}(t) + C\dot{Y}(t) + KY(t) = 0 \quad (2.1)$$

où  $M$ ,  $K$  et  $C$  sont respectivement les matrices de masse, de raideur et d'amortissement de la structure,  $Y$ ,  $\dot{Y}$ ,  $\ddot{Y}$  sont respectivement les vecteurs de déplacement, de vitesse et d'accélération des nœuds de discrétisation.

Les caractéristiques modales d'une structure sans amortissement sont obtenues par la résolution de l'équation :

$$(K - \lambda_k M)\phi_k = 0 \quad (2.2)$$

où  $\lambda_k$  est le carré de la pulsation propre correspondant au mode propre  $\phi_k$ . La solution est obtenue en résolvant l'équation aux valeurs propres :

$$\det([K] - \lambda_k[M]) = 0 \quad (2.3)$$

A partir des matrices de masse et de rigidité, il est possible de déduire les fréquences propres du système non amorti et ses modes propres. Une structure endommagée peut-être modélisée et les modes propres et fréquences propres de la structure endommagée sont obtenus avec l'équation (2.3).

Hearn et Testa [6] ont démontré que la variation de fréquence  $\frac{\Delta\omega_j^2}{\Delta\omega_k^2}$  de deux modes d'indices  $j$  et  $k$  est indépendant de la sévérité de l'endommagement et n'est fonction que de la position de celui-ci.

Certains chercheurs [7, 8] ont comparé les fréquences propres des structures intactes et endommagées. Par exemple, la fréquence naturelle normalisée (Normalized Natural Frequencies NNF) qui représente le rapport entre les fréquences propres de la structure saine et endommagée peut être donnée par :

$$NNF_k = \frac{\omega_k}{\omega_k^*} \quad (2.4)$$

où  $\omega_k$  et  $\omega_k^*$  définissent les pulsations propres du mode d'indice  $k$  de la structure saine et endommagée respectivement. L'astérisque (\*) représente l'état endommagé et ceci sera valable dans la suite de la thèse.

D'autres chercheurs [9, 10] ont proposé l'utilisation du changement des fréquences propres  $\Delta f_k(\%)$  :

$$\Delta f_k = \left| \frac{f_k - f_k^*}{f_k} \right|$$

Il convient de noter que le pourcentage de la variation des fréquences naturelles peut être très faible et inférieur à 1% pour de petites fissures ou pour des positions particulières de la fissure.

A. Behtani et A. Bouazzouni [11] ont démontré que la méthode de variation du rapport des fréquences locales LFCR (de l'anglais Local Frequency Change Ratio (Eq.(2.5)) localise bien les endommagements dans les poutres unidirectionnelles en matériau composite (Fig. 2.1).

$$LFCR_{ik} = \frac{|LF_{ik}^* - LF_{ik}|}{LF_{ik}} \quad (2.5)$$

avec  $LF_{ik} = \frac{\phi_k^T K_i \phi_k}{\phi_k^T M_i \phi_k}$  et  $LF_{ik}^* = \frac{\phi_k^{T*} K_i^* \phi_k^*}{\phi_k^{T*} M_i^* \phi_k^*}$  les fréquences locales de l'élément  $i$  sain et endommagé par rapport au mode  $k$ .

Par ailleurs, dans toutes les études, que ce soit sur des ponts métalliques, mixtes ou en béton (armé ou précontraint), les fréquences décroissent avec la taille de l'endommagement. Ceci semble logique et intuitif puisque l'endommagement tend à réduire la rigidité de la structure. La littérature rapporte de nombreuses études sur la détection d'endommagements par l'analyse des décalages fréquentiels. En réalité, la plupart de ces études montrent que l'analyse de ces changements semble être d'une utilité pratique très limitée. De plus, Fox [12] a montré, en utilisant des résultats numériques et expérimentaux sur une poutre, que les changements des fréquences propres sont des indicateurs peu sensibles

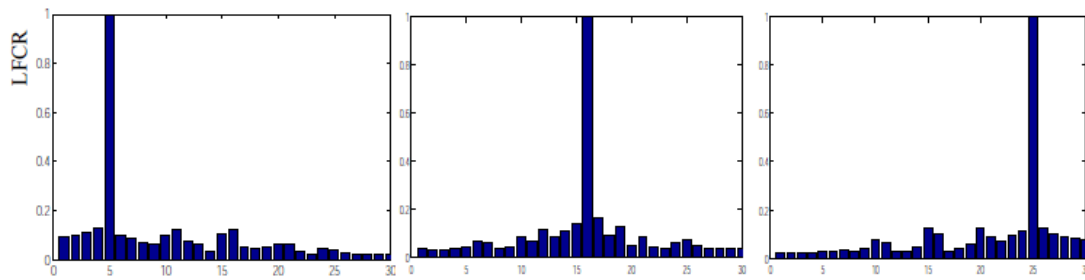


FIGURE 2.1 – Variation de LFCR d’une poutre en composites, en fonction de la position de l’endommagement [11]

Cas	Fréquences (Hz)		
	1 <sup>ère</sup>	2 <sup>ème</sup>	3 <sup>ème</sup>
<b>Ouvrage intègre</b>	2.5	2.97	3.56
<b>Niveau 1</b>	2.47	2.94	3.54
Changement (%)	-1.24	-1.04	-1.74
<b>Niveau 2</b>	2.53	3	3,53
Changement (%)	1.24	1.04	-0.87
<b>Niveau 3</b>	2.53	3.00	3.59
Changement (%)	1.24	1.04	0.90
<b>Niveau 4</b>	2.31	2.84	3.54
Changement (%)	-7.52	-4.21	-1.74

TABLEAU 2.1 – Fréquences propres et variations relatives pour les différents niveaux de l’endommagement-Pont I40 [14]

dans le cas d’une poutre entaillée à l’aide d’une scie. Srinivasan et Kot [13] concluent ceci également de leur étude sur des plaques endommagées.

L’étude du pont I40<sup>1</sup> réalisée par Alvandi [14] confirme aussi que les changements des fréquences propres ne sont pas des indicateurs sensibles à la détection des endommagements (Tab. 2.1) . Selon [15], il est nécessaire que le changement des fréquences propres causé par un endommagement soit supérieur à 5% pour faire confiance aux résultats de détection. Cependant, les changements significatifs de fréquences seuls n’impliquent pas automatiquement l’existence d’un endommagement. Dans certains cas, des variations de fréquences sont observées durant une journée d’essais, qui sont principalement dues aux conditions ambiantes, et qui sont de plus de 5% pour les ponts en béton ou en acier [16].

Dans le cas général, comme les fréquences propres retranscrivent un comportement global de la structure, il n’est pas évident que leurs changements puissent être utilisés pour localiser spatialement les défauts. Autrement dit, les fréquences ne peuvent pas fournir d’informations fiables sur la position des changements structurels et sont assez sensibles aux variations climatiques et aux variations des CL.

1. Le pont I40 est situé sur l’Interstate Highway 40 dans l’Oklahoma qui lie Texas à l’Arkansas. C’est un ouvrage constitué de deux ponts jumeaux en béton armé et dont le tablier est de 13.22 m de largeur et de 17,8 cm d’épaisseur.

### 2.2.2 Changement de l'amortissement

Le changement de l'amortissement peut être un indicateur intéressant pour la détection de défaut. Modena et al.[17] indiquent que l'utilisation de l'évolution de l'amortissement permet la détection de fissures indétectables par l'évaluation du changement des fréquences. Plus le défaut est sévère, plus le facteur d'amortissement est élevé.

Cependant, Salane et Baldwin [18] ont étudié l'influence de l'endommagement sur les coefficients d'amortissement. Leurs conclusions furent que ceux-ci ne pouvaient constituer des indicateurs fiables parce qu'ils pouvaient augmenter, puis diminuer. L'amortissement a été défini comme un paramètre instable sur la variabilité naturelle des paramètres modaux. Malgré tout, d'autres études tendent à confirmer l'utilité de se servir de l'amortissement comme un indicateur de l'intégrité de la structure. D. Zonta [19] a utilisé les modes propres, les fréquences propres et les amortissements modaux afin de détecter une fissure dans une dalle précontrainte. La figure 2.2 montre les résultats pour le changement de l'amortissement.

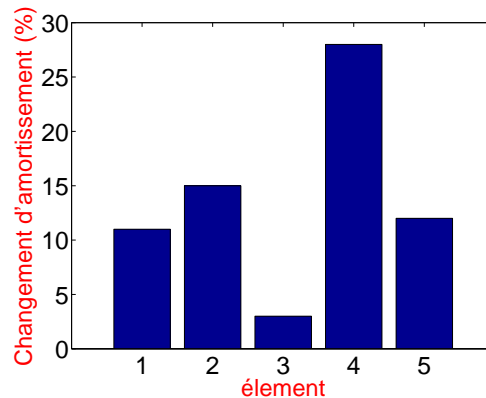


FIGURE 2.2 – Changement d'amortissement modal : fissure sur l'élément 4 [19]

### 2.2.3 Changement des déformées modales

Le changement des paramètres modaux ne peut pas être identique pour chaque mode : il dépend de la nature, de la localisation et de la sévérité de l'endommagement. D'après Duggan et al.[20], il est nécessaire d'identifier les déformées propres associées aux fréquences propres.

#### 2.2.3.1 Déformées propres

L'approche utilisant des modes propres a gagné récemment une attention considérable. En étudiant les décalages fréquentiels, Biswas et al.[21] ont mis en évidence la sensibilité des déformées modales à la présence d'un endommagement dans une structure. Salane et Baldwin [18], Mazurek et Dewolf [22] obtinrent à la suite de leurs études des conclusions analogues. Cependant, le recours aux déformées modales pour la localisation des endommagements n'est pas unanime. Alampalli et al.[23] ainsi que Salawu et al. [33] reportent des cas où les changements fréquentiels sont plus sensibles que les changements des déformées propres. En effet, l'inconvénient principal de la technique de détection

fondée sur les modes propres est le nombre de points de mesure sur la structure pour avoir une forme précise de chaque mode.

West [25] a utilisé les déformées propres pour la localisation d'endommagements sans recourir à un modèle aux éléments finis. Une première méthode, très générale, est de comparer directement deux séries de mesures. La présence d'endommagements dans une structure provoque des modifications des déformées modales de la structure. Ces modifications peuvent donc être utilisées pour la détection et la localisation des endommagements. Deux critères sont couramment utilisés pour évaluer la corrélation entre les déformées modales avant et après endommagement.

Introduit en 1982 par Allemang et Brown [26], le coefficient *MAC* (Modal Assurance Criterion) est défini comme le scalaire reliant deux vecteurs modaux :

$$MAC_k = \frac{\sum_{i=1}^n (\phi_{ik}^T \phi_{ik}^*)^2}{\sum_{i=1}^n (\phi_{ik}^T \phi_{ik}) \times \sum_{i=1}^n (\phi_{ik}^{*T} \phi_{ik}^*)} \quad (2.6)$$

où  $\phi_{ik}$  et  $\phi_{ik}^*$  sont les valeurs des déformées modales  $n^o k$  au ddl  $i$  des états sain et endommagé respectivement, et  $n$  le nombre de points de mesure.

Le *MAC* varie entre 0 et 1, prenant la valeur 1 pour deux modes identiques et 0 lorsque les deux modes sont non corrélés. Une légère modification du mode provoquée, par un endommagement, est a priori détectable. Un *MAC* faible indique la présence d'endommagement dans la structure et la valeur du *MAC* décroît avec la sévérité du défaut.

Le *MAC* peut détecter le défaut toutefois, pour le localiser, le coefficient *COMAC* (Co-Ordinate Modal Assurance Criterion) a été introduit. Il permet d'évaluer la corrélation entre les déformées modales au degré de liberté  $i$ . Le facteur *COMAC* en un point  $i$  est défini par [27]. Il a pour expression :

$$COMAC_i = \frac{\sum_{k=1}^N (\phi_{ik}^T \phi_{ik}^*)^2}{\sum_{k=1}^N (\phi_{ik}^T \phi_{ik}) \times \sum_{k=1}^N (\phi_{ik}^{*T} \phi_{ik}^*)} \quad (2.7)$$

où  $N$  est le nombre de modes propres étudiés.

Le changement dans les déformées modales est en général très faible et fournit rarement une indication claire sur les endommagements (Fig. 2.3). Dans ce cas, il est nécessaire d'utiliser un nombre suffisant de capteurs pour assurer un maillage fin de la structure permettant de mieux définir les déformées propres.

Yuen [29], Rizos et al. [30], Osegueda et al.[31], Kam et Lee [32], Salawu et Williams [33], Lam et al.[34], Salawu [35], Kim et al. [36], Srinivasan et Kot [13] ont fourni différents exemples qui examinent le changement des déformées modales. Ces études s'appuient sur les valeurs du *MAC* et du *COMAC*.



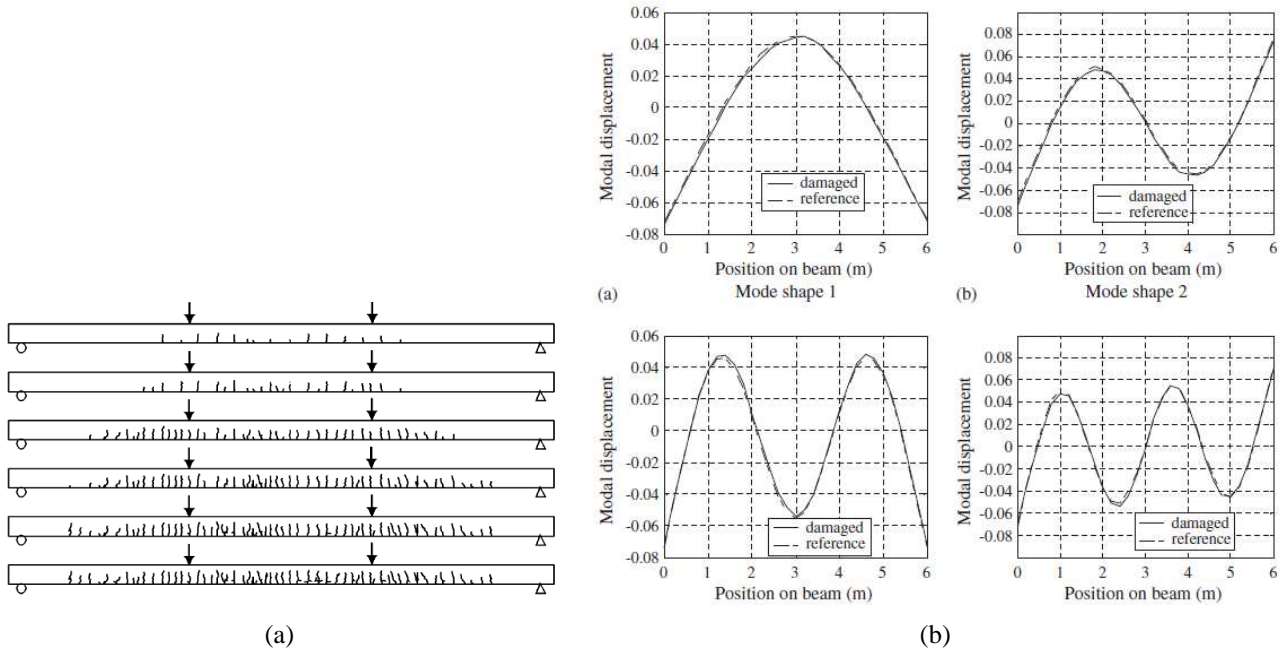


FIGURE 2.3 – (a) Poutre en béton armé fissurée par une flexion 4 points (b) Modes propres identifiés [28]

### 2.2.3.2 Méthode de flexibilité

Une autre classe de méthode d'identification de défaut combine les variations des fréquences propres et des déformées modales, comme la matrice de flexibilité. Aktan et al.[37] ont proposé l'utilisation de la flexibilité mesurée pour évaluer la présence d'un défaut.

Pandey [38] a présenté également le changement de flexibilité entre deux états comme un paramètre sensible à la détection et à la localisation de défaut. Les résultats numériques et expérimentaux ont montré que l'estimation de la présence et la localisation d'un défaut peuvent être obtenues à partir des trois premiers modes de la structure.

Typiquement, l'endommagement est détecté en comparant la matrice de flexibilité obtenue par les modes de la structure saine et celle de la structure endommagée.

La matrice de flexibilité est l'inverse de la matrice de rigidité. L'expression de la matrice de flexibilité est donnée par l'équation (2.8) :

$$F = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\omega_k^2} \phi_k \phi_k^T \quad (2.8)$$

où  $\phi_k$  est le  $k^{\text{ème}}$  mode propre de dimension  $n \times N$ ,  $n$  étant le nombre de degré de liberté et  $N$  le nombre de modes propres étudiés.

$\Omega = \text{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_k^2, \dots, \omega_N^2)$  est la matrice diagonale des rigidités modales et  $\omega_k$  est la  $k^{\text{ème}}$  pulsation propre. Toutefois, les modes doivent être normalisés par rapport à la masse, ce qui implique que la matrice de masse doit être déterminée.

En considérant l'expression (2.8), nous constatons qu'avec l'augmentation de la pulsation, la contri-

bution modale de la matrice de flexibilité diminue, c'est-à-dire qu'en augmentant le nombre de fréquences, la matrice de flexibilité converge rapidement. Une bonne estimation de la matrice de flexibilité peut être obtenue seulement avec les premiers modes [38]. L'identification d'endommagement en utilisant la matrice de flexibilité est plus sensible avec le changement des modes basses fréquences [39].

La différence de la matrice de flexibilité entre l'état sain et l'état endommagé est donnée par :

$$\Delta F = |F - F^*| \quad (2.9)$$

Le maximum de chaque colonne de la matrice  $\Delta F$  est déterminé et la valeur maximale des maxima permet d'identifier l'emplacement du défaut. Mayes [40] a utilisé le changement de flexibilité  $\Delta F$  à partir des fréquences expérimentales pour localiser l'endommagement au niveau du pont I40.

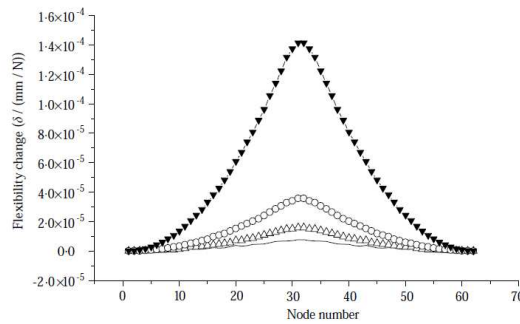


FIGURE 2.4 – Changement de flexibilité : éléments 29 ; 31 et 33 endommagés [41]

Alvandi et Crémone [47] ont utilisé le changement de flexibilité pour détecter et identifier des défauts dans une poutre simplement supportée. Ils l'ont également appliquée sur diverses données expérimentales comme celles des ponts I40 et Z24<sup>2</sup>. Ils ont trouvé que la technique n'est pas performante lorsqu'il y a plusieurs endommagements ou lorsqu'ils sont proches des extrémités.

## 2.3 Méthodes des Indicateurs évolués

Plutôt que d'utiliser les déformées modales directement pour obtenir des informations sur le défaut, une autre façon est d'étudier leurs dérivées secondes, ou courbures modales. L'article de Pandey et al. [42] montre que les courbures modales sont excessivement sensibles aux endommagements et sont capables de les localiser. Pour un modèle analytique d'une poutre console et d'une poutre simplement supportée, ils ont étudié l'applicabilité de la méthode. Les courbures modales sont toutefois plus sensibles à la qualité des mesures et à la précision du calcul (et donc au nombre de capteurs utilisés).

2. Pont en Suisse de 63.3 m en béton précontraint de l'autoroute A1 Berne-Zurich liant Koppigen et Utzenstorf.

### 2.3.1 Changement de courbure modale

La courbure est directement reliée à la rigidité de flexion et s'écrit :

$$\nu''(x) = \frac{M(x)}{EI} \quad (2.10)$$

où  $E$  est le module d'Young et  $I$  le moment quadratique de la section. La diminution de la rigidité en flexion  $EI$  mène à l'augmentation de la courbure  $\nu''$  dans la section. Comme les changements de courbure sont locaux et qu'ils dépendent du taux de réduction de la rigidité  $E(x)I(x)$ , le changement de courbure peut être utilisé pour la détection et la localisation des endommagements [43].

En définissant un défaut par une réduction de rigidité locale, une augmentation locale de la courbure dans la section est induite. En général [42, 44], pour calculer la courbure modale, la différence finie centrale est appliquée :

$$\phi_k''(x_i) = \frac{\phi_k(x_{i+1}) - 2\phi_k(x_i) + \phi_k(x_{i-1}))}{h^2} \quad (2.11)$$

où  $h$  est le pas, supposé constant, entre deux points de mesure et  $\phi_k(x_i)$  la déformée modale du  $k^{\text{ème}}$  mode au point d'abscisse  $x_i$ .

Pandey et al.[42] ont mis en évidence que la différence absolue entre la courbure modale de la structure saine et de la structure endommagée peut être un bon indicateur d'endommagement car il permet de le localiser. Wahab et De Roeck [44] ont utilisé la méthode de la courbure modale pour détecter les défauts dans des poutres et pour le pont Z24 (Fig. 2.5). Ils ont constaté que la courbure des premiers modes est plus précise que celle des modes élevés.

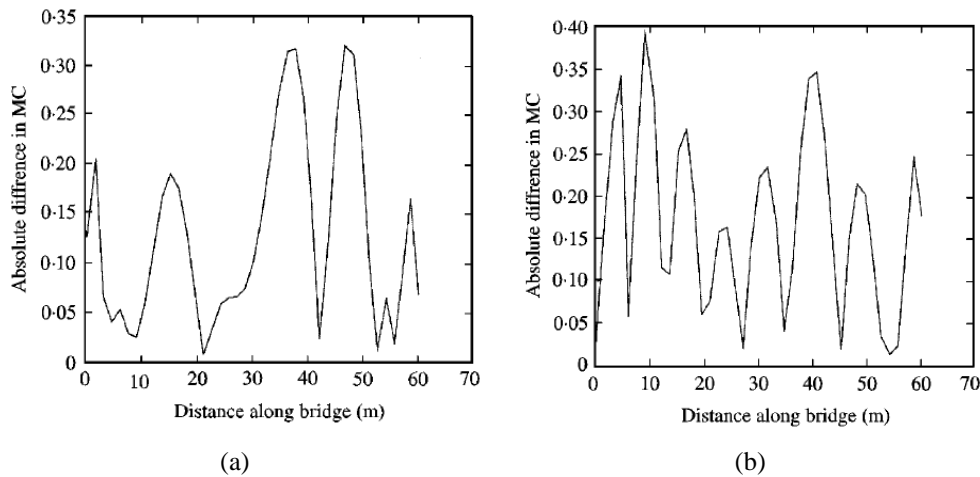


FIGURE 2.5 – Différence de courbure modale : (a) Mode 1, (b) Mode 3 (pont Z24 -côté Berne) [44]

La courbure modale a aussi été appliquée par Parloo et al [46] pour la détection de différents endommagements du pont I40 à New Mexico. Ils ont démontré que cette technique ne peut pas détecter les défauts de petites tailles du fait des dispersions des déformées et des conditions ambiantes.

Dans le cas où plusieurs déformées modales sont utilisées, les valeurs absolues du changement de

courbure de chaque mode peuvent être additionnées pour fournir un paramètre unique :

$$\Delta^{CM}(i) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |\phi''_{ik} - \phi''_{ik*}| \quad (2.12)$$

Cette différence doit être maximale dans la région de l'endommagement puisque c'est là où la réduction de la rigidité en flexion est la plus importante. Des pics apparaissent donc au niveau des zones endommagées.

### 2.3.1.1 Utilisation de capteurs ponctuels « classiques »

Les capteurs ponctuels (accéléromètres, capteurs de vitesse et de déplacement) permettent de remonter aux déformées modales  $\phi_k(x_i)$  de la poutre [43]. Ainsi, pour remonter aux courbures modales à partir des déformées modales déterminées avec des capteurs ponctuels, il faut effectuer une double dérivation spatiale (Eq. (2.11)).

L'erreur introduite par cette approximation de la courbure modale dépend du carré du pas de mesure. Expérimentalement, la déformée modale est généralement déterminée pour un nombre réduit de points de mesure. Or si le pas  $h$  est trop important, c'est-à-dire si le nombre de capteurs est insuffisant, le calcul de la différence finie centrée introduit une erreur importante sur la valeur de la courbure modale obtenue. A cela, il faut également ajouter les erreurs obtenues sur la détermination expérimentale de la déformée modale qui seront amplifiées par le calcul de l'approximation de la courbure. L'utilisation de cette approximation est donc limitée. Une technique consiste alors à lisser les valeurs de la déformée modale par des polynômes afin de filtrer les erreurs de dispersion [43]. La justification du choix des paramètres du polynôme de lissage, ordre du polynôme et nombre de points, n'est généralement pas donnée. Par exemple, pour un lissage à l'aide d'un polynôme optimal de degré 2 construit avec 5 points de mesure, il faut appliquer l'expression [26] :

$$\phi_k(x_i) = \frac{-3\phi_k(x_{i-2}) + 12\phi_k(x_{i-1}) + 17\phi_k(x_i) + 12\phi_k(x_{i+1}) + 12\phi_k(x_{i+2})}{35h^2} \quad (2.13)$$

Les expressions mettent en évidence que les valeurs de courbure modale ne seront pas correctement déterminées aux bords. En effet, suivant le nombre de points choisis pour le lissage polynômial, des points aux bords sont perdus. Dans notre exemple, avec un polynôme construit sur 5 points, 2 points sont perdus au niveau de chaque extrémité soit 4 points au total. L'application de la différence finie centrée fait perdre deux points supplémentaires. Au final, six points de mesures sont perdus pour la détermination de la courbure modale. On voit donc que la procédure d'obtention des courbures modales ne permettra pas de détecter des défauts aux bords de la structure étudiée.

Le nombre de capteurs optimal est déterminé en minimisant les erreurs de mesure et de troncature pour le calcul de la courbure modale (se référer au chapitre 3).

### 2.3.1.2 Utilisation d'extensomètres longue base

Des Extensomètres Longue Base (ELB) (jauges longue base (JLB) ou CFO longue base), peuvent également être utilisés pour la détection d'endommagements à partir de la méthode des courbures modales. Les résultats semblent montrer que les ELB sont plus sensibles aux défauts que les accéléromètres. Il a été démontré dans [43] qu'un ELB permet d'obtenir comme mesure l'intégrale de la courbure et de remonter directement, à un facteur multiplicatif près égal à l'inverse de la longueur du capteur  $\frac{1}{b-a}$ , à la courbure moyenne modale définie par :

$$\Psi_k^{moy} = \frac{1}{b-a} \int_a^b \phi_k''(x) dx \quad (2.14)$$

Les vecteurs propres issus des ELB sont ainsi les intégrales de courbure :

$$\Psi_k = \int_a^b \phi_k''(x) dx \quad (2.15)$$

Ensuite, de manière analogue aux capteurs ponctuels (Eq.(2.12)), il est possible de définir un indicateur d'endommagement pour les ELB :

$$\Delta^{ELB}(i) = \sum_{k=1}^N |\Psi_{ik} - \Psi_{ik}^*| \quad (2.16)$$

G. Cumunel a utilisé dans sa thèse [43], des accéléromètres, des JLB et des ELB sur une poutre console. Il a démontré également que l'utilisation des ELB (ou tout autre type de capteur extensométrique) sera plus appropriée à la détection de défauts par la méthode de la courbure modale que celle d'accéléromètres (ou tout autre type de capteur ponctuel menant aux déformées modales), tandis que ces derniers seront plus adaptés pour obtenir les déformées modales d'une structure. La réponse impulsionnelle d'une poutre instrumentée par différents types de capteurs est décrite dans l'annexe A.

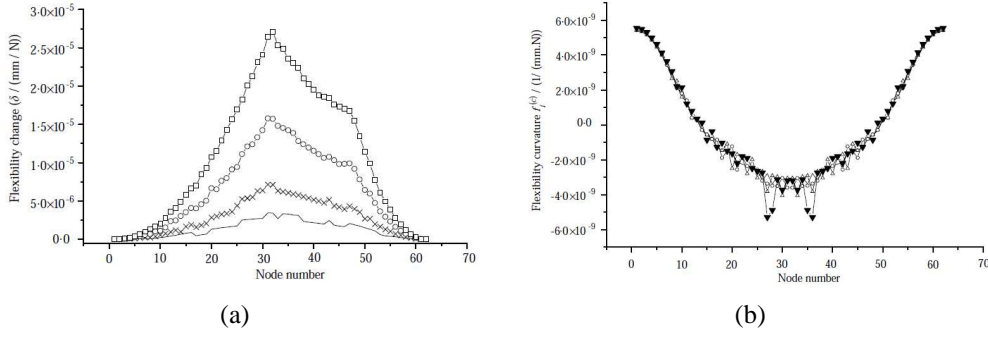
### 2.3.2 Changement de courbure de flexibilité

En combinant certains aspects des méthodes de courbure modale et de flexibilité, Zhang et Aktan [37] ont proposé une autre méthode de détection d'endommagement. De la même manière que pour la méthode de la courbure modale, l'idée générale est que la perte de rigidité localisée cause une augmentation de courbure au même point. Le changement de la courbure entre l'état sain et l'état endommagé s'obtient alors par le calcul de la dérivée seconde de la flexibilité.

Comme pour la courbure modale, la courbure de flexibilité est donnée par :

$$f_i'' = \frac{f_{i-1,i-1} - 2f_{i,i} + f_{i+1,i+1}}{h^2} \quad (2.17)$$

où  $h$  est le pas, supposé constant, entre deux points de mesure et  $f_{i,i}$  est le  $i^{\text{ème}}$  élément de la diagonale de la matrice de flexibilité.



**FIGURE 2.6 – (a) Différence de flexibilité (défauts sur les éléments 31 et 46), (b) Différence de courbure de flexibilité (défauts sur les éléments 27 et 35) [41].**

Alvandi et Crémone [47] ont également utilisé la méthode de courbure de flexibilité en étudiant numériquement la détection d'un ou de plusieurs endommagements dans des poutres en fonction de différents niveaux de bruit. Ils l'ont aussi appliquée au pont I40 (Etats-Unis). Ils ont conclu que si la détection d'un seul endommagement à partir de la courbure de flexibilité est possible, il est cependant difficile de détecter des défauts multiples.

Le changement de courbure de flexibilité entre l'état sain et l'état endommagé est donné par l'expression :

$$\Delta^{CF} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left| \Phi^{*T} \Omega^* \Phi^{*} - \Phi^{*T} \Omega \Phi \right| \quad (2.18)$$

où  $\Omega$  et  $\Omega^*$  représentent les matrices diagonales des fréquences propres de l'état sain et endommagé respectivement,  $\Phi$  et  $\Phi^*$  sont les modes propres correspondants. Ainsi, une augmentation de la courbure de flexibilité indique une perte de rigidité et donc la présence d'un endommagement.

Pour leur part, Lu et al. [41] ont étudié l'efficacité du changement de la matrice de flexibilité et de la courbure de flexibilité pour détecter et localiser des défauts multiples sur un modèle EF d'une poutre en béton armé. Ils ont démontré que les variations de courbure de flexibilité sont très sensibles aux endommagments et peuvent localiser avec précision une réduction de rigidité de 5% seulement. Cependant, les changements de flexibilité sont incapables de localiser des endommagments proches (Fig. 2.6).

### 2.3.3 Méthode fondée sur l'énergie de déformation modale (MSE)

De nombreux chercheurs ont développé différentes techniques de détection d'endommagements basées sur les paramètres modaux. Parallèlement à ces méthodes, il existe des approches énergétiques dont l'objectif est de déceler les éléments de structure qui possèdent une raideur plus faible et donc une énergie de déformation modale (MSE provenant de l'anglais, Modal Strain Energy) plus importante que celle des autres éléments. Ce paramètre de détection a été développé par Stubbs et al. [48]. La différence entre les structures saine et endommagée est obtenue en considérant l'indice  $\Delta\phi_k$  qui

est donné par :

$$\Delta\phi_k = \left(\frac{\omega_k}{\omega_k^*}\right)^2 \phi_k^* - \phi_k \quad (2.19)$$

où  $\omega_k$  et  $\omega_k^*$  sont les pulsations du  $k^{\text{ème}}$  mode propre des états sain et endommagé respectivement.

Pour illustrer cette méthode, considérons une poutre de type Euler-Bernoulli, élastique linéaire, divisée en  $n$  éléments. Pour un mode propre  $\phi_k(x)$  considéré, les expressions des énergies de déformation de la poutre et de l'élément  $n^o i$  s'écrivent respectivement :

$$U_k = \int_0^L EI(x) \left( \frac{\partial^2 \phi_k(x)}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (2.20)$$

$$U_{ik} = \int_{L_i}^{L_{i+1}} EI(x_i) \left( \frac{\partial^2 \phi_k(x_i)}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (2.21)$$

où  $EI(x)$  et  $EI(x_i)$  sont respectivement les rigidités en flexion de la poutre et de l'élément  $n^o i$ ,  $L_i$  et  $L_{i+1}$  étant les abscisses des nœuds définissant l'élément  $i$  avec  $L_i \leq x_i \leq L_{i+1}$ .

Kim et Stubbs [49] ont défini un indicateur qui, lorsqu'il reste négatif, indique l'absence de dommages et, lorsqu'il est positif, indique la présence d'endommagements. Cette méthode est développée pour de faibles endommagements car elle repose sur une linéarisation des énergies de déformation après l'endommagement [14].

L'indicateur  $Z_i$  est défini par la relation :

$$Z_i = \frac{\beta_i - \bar{\beta}}{\sigma} \quad (2.22)$$

où  $\bar{\beta}$  et  $\sigma$  sont respectivement la valeur moyenne et l'écart-type de  $\beta_i$  (Eq. (2.23)) pour  $N$  modes de vibration.

$$\beta_i = \sum_{k=1}^N \frac{\left[ \int_{L_i}^{L_{i+1}} \left( \frac{\partial^2 \phi_k(x_i)}{\partial x^2} \right)^2 dx \right]^*}{\left[ \int_0^L \left( \frac{\partial^2 \phi_k(x)}{\partial x^2} \right)^2 dx \right]^*} \times \sum_{k=1}^N \frac{\left[ \int_0^L \left( \frac{\partial^2 \phi_k(x)}{\partial x^2} \right)^2 dx \right]}{\left[ \int_{L_i}^{L_{i+1}} \left( \frac{\partial^2 \phi_k(x_i)}{\partial x^2} \right)^2 dx \right]} \quad (2.23)$$

$\beta_{ik}$  est l'indicateur d'endommagement de l'élément  $i$  pour le mode  $k$  et est défini par l'équation (2.24) :

$$\beta_{ik} = \frac{\left[ \int_{L_i}^{L_{i+1}} \left( \frac{\partial^2 \phi_k(x_i)}{\partial x^2} \right)^2 dx \right]^*}{\left[ \int_0^L \left( \frac{\partial^2 \phi_k(x)}{\partial x^2} \right)^2 dx \right]^*} \times \frac{\left[ \int_0^L \left( \frac{\partial^2 \phi_k(x)}{\partial x^2} \right)^2 dx \right]}{\left[ \int_{L_i}^{L_{i+1}} \left( \frac{\partial^2 \phi_k(x_i)}{\partial x^2} \right)^2 dx \right]} \quad (2.24)$$

Les maxima sont atteints au point où l'endommagement est situé. Des études expérimentales réalisées

par Alvandi et Crémona [50] sur les ponts Z24 et PK075+317<sup>3</sup>, ont confirmé la capacité de cette méthode énergétique. Ils ont trouvé que la technique était stable avec des mesures bruitées et qu'elle était plus efficace que les méthodes précédentes. Cependant, ils ont conclu qu'elle présentait des difficultés à détecter et à localiser les endommagements lorsqu'ils sont simultanés et complexes, ou proches des appuis.

Par ailleurs, cette méthode présente certaines limites [51]. Par exemple les nœuds des modes peuvent créer de faux endommagements détectés ou, parfois, ne pas détecter des zones endommagées. Lorsque le défaut est proche des appuis, la localisation des défauts n'est plus précise. Certains problèmes peuvent être améliorés en utilisant la somme des indicateurs provenant de chacun des modes propres (Eq.(2.23)), mais les résultats de cette méthode dépendent beaucoup du nombre de modes utilisés [52].

Petro et al. [53] ont testé la méthode sur des poutres en aluminium avant son application sur des ponts. Cette méthode a été également étudiée par Parloo et al. [46] pour l'identification des endommagements de l'autoroute I-40 de New Mexico. Il a été constaté que la méthode ne procure pas une détection robuste dans le cas de faibles endommagements.

Cornwell et al.[54] ont utilisé cette technique sur une plaque en aluminium comportant deux entailles de dimensions différentes. Les réponses sont obtenues par des accéléromètres. La méthode a pu identifier les endommagements en différentes positions (Fig. (2.7)) mais des difficultés apparaissent pour localiser des défauts de différents degrés de sévérité.

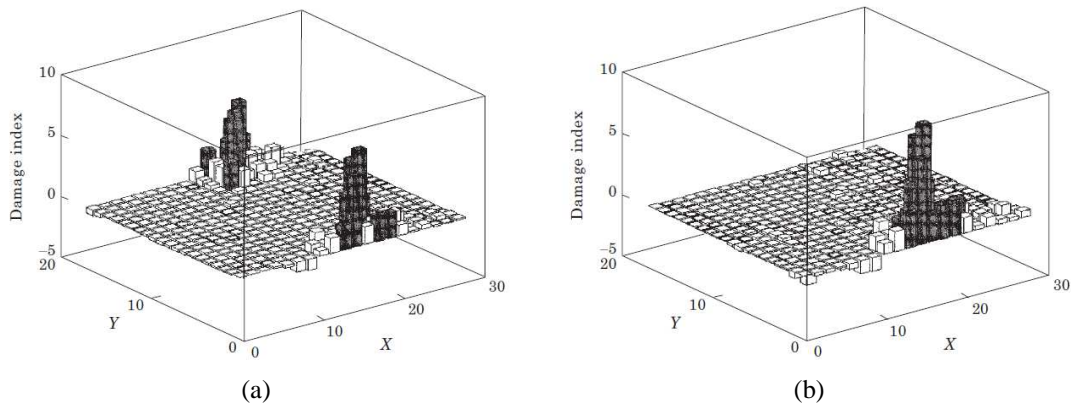


FIGURE 2.7 – Indicateur fondé sur l'énergie de déformation modale [54]

L'énergie de déformation modale d'un élément  $i$  pour un mode  $k$  avant et après l'apparition de l'endommagement est calculée à partir de la matrice de rigidité et des modes propres par les expressions :

$$MSE_{ik} = \phi_k^T K_i \phi_k \quad (2.25)$$

et

3. Un pont-rail à poutrelles enrobées, situé au PK 075+317 de la ligne à grande vitesse Paris Sud-Est [14]



$$MSE_{ik}^* = \phi_k^{*T} K_i \phi_k^* \quad (2.26)$$

Par conséquent, le rapport de changement d'énergie de déformation  $MSECR_{ik}$  (Eq.(2.27)) entre les états sain et endommagé est un indicateur de localisation de défaut et est défini par [55] :

$$MSECR_{ik} = \frac{|MSE_{ik}^* - MSE_{ik}|}{MSE_{ik}} \quad (2.27)$$

Si  $N$  modes sont considérés, la somme des  $MSECR$  de l'élément  $i$  provenant de tous les modes peut être calculée puis normalisée avec la valeur maximale  $MSECR_{max}^i$ .

$$MSECR_i = \sum_{k=1}^N \frac{MSECR_{ik}}{MSECR_{max}^i} \quad (2.28)$$

Les résultats obtenus ont montré que cette méthode est sensible à la détection et la localisation du défaut dans une structure métallique [55].

Par ailleurs, Shi et Zhang [55] ont calculé le rapport de changement de MSE entre la structure à l'état sain et endommagé. Cette méthode s'appuie sur le changement de MSE (Eq. (2.25)) dans chaque élément de la structure avant et après l'endommagement. La valeur élevée  $MSECR_k$ , pour le mode  $n^\circ k$ , se situe au niveau de l'élément endommagé et les valeurs faibles se trouvent aux éléments éloignés de l'endommagement.

Les méthodes de flexibilité, de courbure modale et de courbure de flexibilité sont des méthodes quantitatives. Ces méthodes permettent de quantifier la sévérité du défaut, ainsi une augmentation des modifications structurales se traduit par une augmentation de leur valeur. La méthode de l'indicateur d'endommagement ne détermine pas l'importance de l'endommagement, elle fournit plutôt une probabilité d'apparition d'un défaut. C'est ainsi que la question de la distinction entre « élément endommagé » et « non endommagé » se pose en regard de la valeur de l'indice d'endommagement obtenu [14].

## 2.4 Méthodes dans le domaine des fréquences : courbure de FRF

La limitation des méthodes basées sur les changements des fréquences propres, des modes propres, des courbures modales et de l'énergie de déformation modale réside dans le fait qu'il est nécessaire d'extraire les caractéristiques modales des mesures avec une bonne précision.

Cependant, des méthodes classiques d'analyse modale expérimentale exploitent les Fonctions de Réponse en Fréquence (FRF) qui nécessitent la connaissance de l'excitation. Cette technique est basée sur le changement de la FRF entre deux états de la structure.

### 2.4.1 Description théorique de la FRF

L'équation du mouvement d'une structure discrétisée (par EF par exemple) est souvent exprimée par :

$$M\ddot{Y}(t) + C\dot{Y}(t) + KY(t) = F(t) \quad (2.29)$$

où  $M$ ,  $K$  et  $C$  sont respectivement les matrices de masse, de raideur et d'amortissement de la structure, et  $Y$ ,  $\dot{Y}$ ,  $\ddot{Y}$  sont respectivement les vecteurs de déplacement, de vitesse et d'accélération.

Dans le cas d'une excitation harmonique, la force est exprimée par :

$$F(t) = F_0^j e^{i\omega t} \delta_m^j \quad (2.30)$$

où  $\omega$  est la pulsation propre,  $F_0$  l'amplitude de la force,  $j$  l'indice du ddl où la force est appliquée, et  $\delta_m^j$  est la distribution de Dirac (=1 pour  $m=j$ , 0 sinon). La réponse peut être considérée comme étant

$$y(t) = X e^{i\omega t} \quad (2.31)$$

L'équation précédente peut être ainsi reformulée :

$$(-\omega^2 M + i\omega C + K)X = F \quad (2.32)$$

Par conséquent, la relation entre la réponse  $X(\omega)$  et l'excitation  $F(\omega)$  à chaque fréquence  $\omega$  est donnée par :

$$X(\omega) = F(\omega).H(\omega) \quad (2.33)$$

où  $H(\omega)$  définit la matrice de transfert du système, ou FRF, et est égale à :

$$H(\omega) = (-\omega^2 M + i\omega C + K)^{-1} \quad (2.34)$$

La relation entre la réponse au  $i^{\text{ème}}$  ddl et l'excitation appliquée au  $j^{\text{ème}}$  ddl définit la fonction de réponse en fréquence individuelle,  $H_{ij}(\omega)$ , qui est donnée par :

$$H_{ij}(\omega) = \frac{X_i(\omega)}{F_j(\omega)} \quad (2.35)$$

### 2.4.2 Extension du MAC pour la Fonction de Réponse en Fréquence

Comme décrit précédemment, la rigidité et l'amortissement d'une structure sont influencés par la présence d'un défaut. La fonction de transfert de la structure endommagée peut donc être utilisée comme un indicateur d'endommagement.

Une extension du critère de corrélation MAC pour la FRF a été proposée par Heylen et Lammens

[57], le critère  $FRAC$  (Frequency Response Assurance Criterion) est donné par :

$$FRAC_{ij}(\omega) = \frac{|H_{ij}(\omega) - \overline{H}_{ij}^*(\omega)|^2}{H_{ij}(\omega) \cdot H_{ij}^*(\omega) \cdot \overline{H}_{ij}(\omega) \cdot \overline{H}_{ij}^*(\omega)} \quad (2.36)$$

où  $H_{ij}$  et  $\overline{H}_{ij}$  indiquent la FRF (fonction complexe) et son conjugué respectivement.

Dans ce cas, l'excitation est appliquée au ddl  $n^\circ j$  et la fonction de réponse est évaluée au ddl  $n^\circ i$ . La valeur de  $FRAC_{ij}$  varie entre zéro et un. Si la valeur de  $FRAC_{ij}$  est égale à 1, la structure n'est pas endommagée. Plus l'endommagement est sévère, plus la valeur de  $FRAC_{ij}$  est faible.

### 2.4.3 Détection de défaut par la courbure de FRF

Cette technique de détection d'endommagement est une extension de l'approche de Pandey et al.[42] sur la courbure des déformées modales appliquée sur la FRF pour une bande de fréquence donnée. La courbure de la réponse en fréquence peut être estimée en utilisant l'approximation de la différence finie centrée :

$$H''_{j\omega}(i) = \frac{H''_{j\omega}(i+1) - 2H''_{j\omega}(i) + H''_{j\omega}(i-1)}{h^2} \quad (2.37)$$

où  $H_{ij}$  est la fonction de réponse en fréquence mesurée au ddl  $n^\circ i$  pour une excitation appliquée au ddl  $n^\circ j$  pour une fréquence donnée  $\omega$  et  $h$  est le pas, supposé constant, entre deux points de mesure. La différence absolue entre la courbure de réponse en fréquence de la structure saine et de la structure endommagée pour une bande de fréquence donnée  $\omega = [\omega_{initial}, \omega_{final}]$  est exprimée alors par :

$$\Delta H_{j\omega}(i)'' = \sum_{\omega=\omega_{initial}}^{\omega_{final}} |H_{j\omega}(i)''^* - H_{j\omega}(i)''| \quad (2.38)$$

Sampaio, Maia et Silvia [58] ont développé et appliqué cette méthode sur le pont I40. Les résultats ont montré son efficacité pour la détection et la localisation des endommagements. L'avantage de la méthode est qu'elle ne nécessite pas d'analyse modale afin d'identifier les fréquences ou les modes propres, ce qui est le cas de beaucoup d'autres méthodes de détection.

L'application de cette méthode sur des données numériques a fourni de bons résultats [58]. Cependant, avec des données expérimentales, les résultats sont moins satisfaisants (Fig. 2.8 et Fig. 2.9). Les auteurs ont conclu que la méthode n'est pas fiable pour certains petits défauts (par exemple les fissures) .

Palacz et al.[59] ont utilisé la courbure de réponse en fréquence pour la détection des endommagements dans des poutres consoles. Ils ont démontré que plus le nombre de capteurs est élevé plus la localisation du défaut est précise. De plus, ils ont indiqué que les erreurs introduites dans la courbure de réponse en fréquence n'affecte pas la détection et la localisation des défauts.

Une autre technique a été proposée [60] utilisant l'énergie de la courbure de FRF de la structure pour une bande de fréquence donnée. Pour une poutre par exemple, l'énergie de la courbure de la réponse

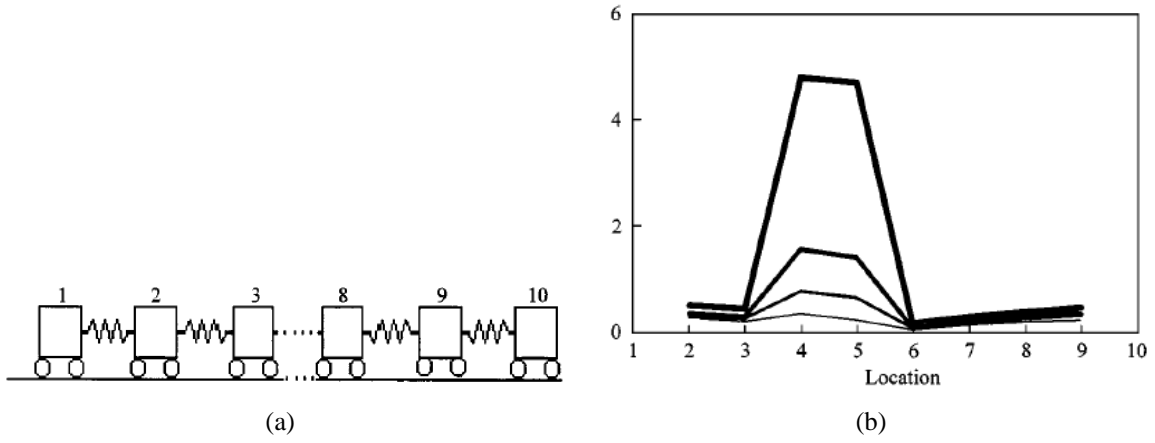


FIGURE 2.8 – Courbure de FRF numérique d'un système à ressorts : défaut entre les éléments  $n^o 4$  et  $n^o 5$ . Les courbes représentent différents cas d'endommagements [58]

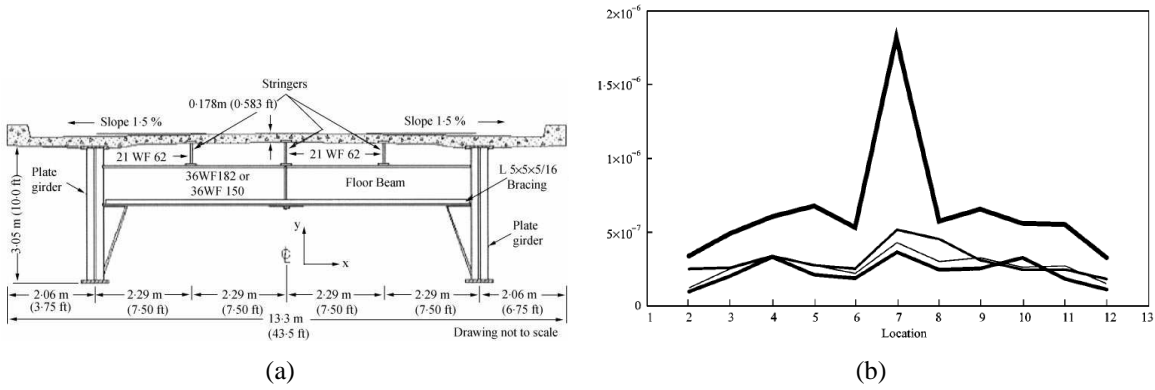


FIGURE 2.9 – Courbure de FRF expérimentale du pont I40 : défaut au niveau du point  $n^o 7$ . Les courbes représentent différents cas d'endommagements [58]

en fréquence pour un élément  $i$  est estimée par :

$$\eta_{j\omega}(i) = \int_{L_i}^{L_{i+1}} [H''_{j\omega}(x_i)]^2 dx \quad (2.39)$$

où  $L_i$  et  $L_{i+1}$  sont les abscisses des nœuds définissant l'élément  $n^o i$  et  $H''_j(x_i, \omega)$  la courbure de FRF en un point  $x_i$  pour une fréquence  $\omega$  et une excitation au point  $x_j$ .

La différence absolue entre l'énergie de la courbure de FRF pour un état endommagé et un état sain au point  $x_i$  pour une excitation au point  $x_j$ , dans un intervalle de fréquence prédéterminée, est ensuite définie par :

$$\Delta\eta_j(i) = \sum_{\omega=\omega_{initial}}^{\omega_{final}} |\eta_{j\omega}^*(i) - \eta_{j\omega}(i)| \quad (2.40)$$

où  $\eta_{ij}(\omega)$  et  $\eta_{ij}^*(\omega)$  représentent l'énergie de la courbure de FRF de la poutre saine et endommagée respectivement.

La valeur  $\Delta\eta_{ij}$  sera élevée dans la zone endommagée.

Dans [60], la méthode est appliquée sur un modèle EF de plaque avec un endommagement modélisé

par une réduction d'épaisseur. Ils ont étudié l'influence de différents paramètres et les résultats de détection, localisation et quantification ont été satisfaisants (Fig. 2.10).

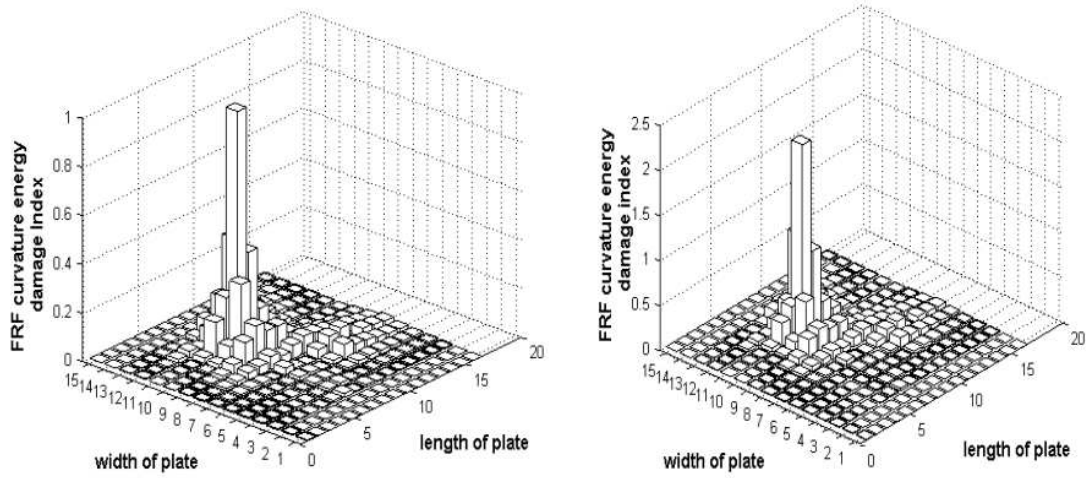


FIGURE 2.10 – Différence de l'énergie de courbure de FRF pour un modèle de plaque EF pour une réduction de section : 83.33% (à gauche) et 66.66% (à droite) [60]

## 2.5 Méthode du filtrage modal

Une nouvelle approche pour la détection de défauts a été proposée par Deraemaeker et al. [61]. Cette technique s'appuie sur l'utilisation d'un nombre élevé de capteurs  $n$  (Fig. 2.11) qui seront combinés linéairement par (Eq. (2.41)).

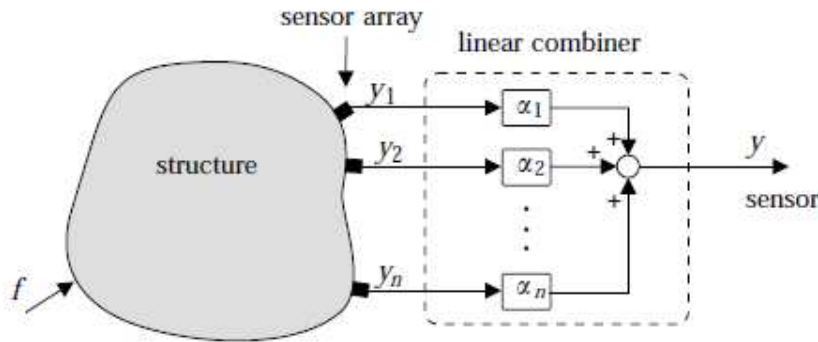


FIGURE 2.11 – Représentation du filtrage spatial avec  $n$  capteurs combinés linéairement [61]

$$y = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i \quad (2.41)$$

Les filtres modaux sont construits soit par les FRFs ou les transformées de Fourier (TF) de la structure saine, soit par les paramètres modaux identifiés.

Cette combinaison permet d'effectuer un filtrage modal qui isole un mode  $k$  déterminé par la sélection des coefficients  $\alpha_i$  (Eq. (2.41)) et, par suite, toutes les contributions des autres modes disparaissent du

signal.

Les coefficients sont solutions de l'équation (2.42) :

$$C^T \alpha_k = e_k \quad (2.42)$$

où  $\alpha$  est la matrice des coefficients du filtrage modal et  $e_k = [0 \ 0 \ \dots \ 1 \ \dots \ 0]^T$  le vecteur nul à l'exception de l'élément  $k$  qui correspond à la fréquence propre filtrée.  $C$  est la matrice rectangulaire de sortie. La matrice pseudo-inverse de  $C$ ,  $(C^T)^+$ , qui est calculée par la technique de SVD (décomposition en valeurs singulières) [62].

$$C^T = USV^T \quad (2.43)$$

avec  $S = \text{diag}(\sigma_i)$

$$(C^T)^+ = \sum_{i=1}^r \frac{1}{\sigma_i} u_i v_i^T \quad (2.44)$$

D'où  $\alpha$  qui est donné par l'équation :

$$\{\alpha_k\} = \{\alpha_{k,1} \dots \alpha_{k,n}\}^T = \left( \sum_{i=1}^r \frac{1}{\sigma_i} u_i v_i^T \right) e_k \quad (2.45)$$

$\alpha$  est gouverné par deux paramètres qui sont le nombre de modes  $N$  considérés dans la matrice  $C$  ( $N$  limité par le nombre de capteurs) et le nombre de valeurs singulières  $r$  non nulles ( $r \leq N$ ) pour résoudre l'équation (2.45).

Dans [61], les auteurs ont appliqué la méthode pour différencier un endommagement local de la structure des variations dues aux changements environnementaux. Les études numériques sur une poutre simplement appuyée ont montré une caractéristique intéressante du filtrage modal : l'apparition de pics dans le cas de changement de rigidité de la structure qui n'apparaissent pas dans le cas d'un changement environnemental (température) (Fig. 2.12).

## 2.6 Autres méthodes

### Méthodes dans le domaine temps-fréquences

L'avantage de ces méthodes est qu'elles s'appliquent directement à partir des réponses vibratoires en temps indépendamment du domaine modal. Les deux techniques les plus utilisées sont les transformées de Hilbert-Huang (HHT) et en ondelettes (TO). En observant la relation « temps-fréquence », l'endommagement peut être détecté, même lorsque le niveau de bruit de la mesure est important. Cependant, la localisation du défaut n'est pas abordée. Yan et al. [63] ont proposé une nouvelle technique d'identification de défauts en utilisant la TO. L'idée est d'appliquer cette dernière sur la réponse libre,

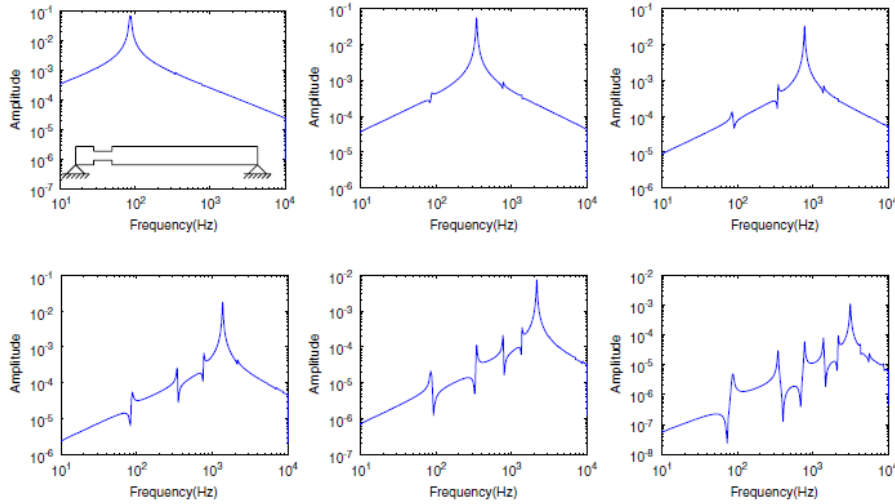


FIGURE 2.12 – FRFs obtenues en isolant les 6 premiers modes, avec un endommagement local de 10% de perte de rigidité [61]

sans amortissement, d'une structure :

$$M\ddot{Y}(t) + KY(t) = 0 \quad (2.46)$$

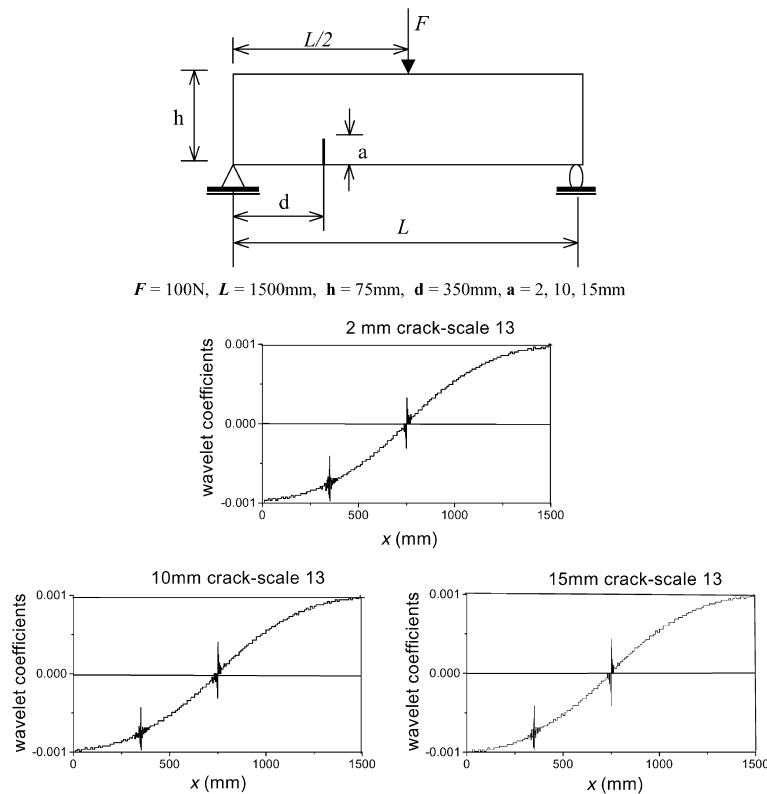
Les auteurs ont appliqué cette méthode sur des données numériques de réponses libres ou sous sollicitation ambiante. Les résultats montrent que la méthode permet de détecter et localiser même des défauts multiples. La précision des résultats dépend de la technique qui servira à ajuster le modèle EF au modèle expérimental.

La technique a été appliquée, numériquement, par Quek et al. [64] sur une poutre fissurée. Ils ont appliqué la transformée en ondelettes sur les signaux numériques afin d'obtenir les coefficients d'ondelette. L'efficacité de la méthode a été étudiée en fonction de différents paramètres : longueur, largeur et orientation de la fissure. Ils ont conclu que cette méthode temps-fréquence fondée sur la TO est capable de détecter de petites fissures dans des poutres avec différentes CL (Fig. 2.13).

### Méthodes fondées sur le recalage de modèle

Pour ce type de méthodes, un modèle est employé pour simuler la dynamique d'une structure saine et observer les écarts par rapport à la dynamique mesurée. Ces variations sont directement liées aux changements des paramètres du modèle. Le recalage de modèle peut être effectué par des méthodes directes ou par des méthodes de sensibilité. Les méthodes directes donnent des résultats exacts, en recalant les matrices de rigidité et de masse en une seule étape, de manière à ce que la sortie du modèle corresponde aux données expérimentales [65]. Par contre, le modèle recalé ne peut fournir aucune signification physique [66]. C'est la raison principale pour laquelle ces méthodes ne sont pas employées pour la détection d'endommagement. Les méthodes de sensibilité permettent de lever cette limitation des méthodes directes, mais elles exigent une solution itérative [67].

Le développement d'un mécanisme de recalage basé sur la sensibilité se compose des étapes sui-



**FIGURE 2.13 – Analyse par transformée en ondelettes d’une poutre fissurée [64]**

vantes :

- choix du résidu et de la fonction objectif,
- développement du modèle de base,
- choix des paramètres de recalage,
- choix de l’algorithme d’optimisation.

Les résidus sont définis par les différences entre les quantités dynamiques du modèle numérique ou analytique de la structure et celles identifiées expérimentalement [68]. Le choix du résidu joue un rôle important dans tous les problèmes de recalage de modèle EF parce qu’il influence le comportement de l’algorithme d’optimisation utilisé. La majorité des algorithmes de recalage de modèle utilisés pour identifier les endommagements utilise des résidus basés sur les fréquences propres et déformées modales. L’estimation des fréquences propres d’une structure est plus rapide et plus économique (en terme de coût de calcul) que l’identification des déformées modales, ce qui implique son utilisation fréquente pour la construction d’un résidu. Ces méthodes, largement utilisées pour recalibrer les modèles EF en mécanique des structures, ont été détournées de leurs objectifs principaux pour être appliquées en détection d’endommagement. Le but est alors de détecter des écarts sur des paramètres et ces écarts font office d’indicateurs de défauts ou d’endommagements.

Le choix et le nombre de paramètres à mettre à jour sont également des facteurs importants à considérer. Casas et Aparicio [69] ont étudié l’identification d’une fissure dans une poutre en béton armé en utilisant une technique de recalage de modèle. Ils ont conclu que la seule variation des fréquences propres ne permet pas de distinguer les changements de la flexion, du module de déformation ou de



la fissuration.

### Méthode fondée sur le Vecteur Résidu en Force

En employant les modes propres mesurés, les fréquences propres et le modèle d'une structure saine, il est possible de calculer le Vecteur Résidu en Force (*RFV pour Residual Force Vector*) qui peut être utilisé pour la détection, la localisation et l'estimation des endommagements [70].

Les variations de masse  $\Delta M$  et de raideur  $\Delta K$  sont définies comme suit :

$$\Delta M = M^* - M \quad (2.47)$$

et

$$\Delta K = K^* - K \quad (2.48)$$

Les fréquences propres et modes propres satisfont à l'équation aux valeurs propres suivante :

$$(K^* - \omega_k^{2*} M^*) \phi_k^* = 0 \quad (2.49)$$

En substituant les équations (2.47) et (2.48) dans l'équation (2.49), nous obtenons la définition du RFV :

$$RFV_k = (K - \omega_k^{2*} M) \phi_k^* = 0 \quad (2.50)$$

Chaque ligne du RFV représente un seul degré de liberté du modèle numérique de la structure. Un endommagement est matérialisé par un changement dans un élément et, par conséquent, une modification du degré de liberté associé. Cette modification va alors occasionner une augmentation significative pour l'indice du RFV en question par rapport aux autres supposées « saines ». Cette relation fournit donc une méthode pour localiser l'endommagement.

## 2.7 Méthodes développées dans l'équipe

### 2.7.1 Méthode statistique fondée sur la SVD

Une nouvelle méthode de détection a été développée dans la thèse de T.T.H. Le [71], fondée sur la décomposition en valeurs singulières (SVD). L'idée de cette technique de détection est d'appliquer la SVD sur une matrice  $A$  représentant une collection de paramètres modaux (fréquences propre ou modes propres) acquises à différents instants de la vie d'une structure. Les vecteurs singuliers à gauche et à droite ainsi que les valeurs singulières obtenues (Eq. (2.51)) permettront la détection et la localisation des endommagements.

$$A = U \Sigma V^T \quad (2.51)$$

Si  $f_k^{(j)}$  est la  $k^{\text{ème}}$  fréquence propre de l'essai  $j$ , pour  $N$  modes mesurés et  $m$  essais réalisés, la matrice des fréquences propres notée par  $A_f$  est définie comme suit

$$A_f = [f^{(1)} \quad f^{(2)} \quad f^{(m)}]$$

avec

$$f^{(j)} = \{f_1^{(j)} \quad f_2^{(j)} \quad f_N^{(j)}\}$$

Et, si  $\phi_k^{(j)}$  est le  $k^{\text{ème}}$  mode propre de l'essai  $j$ , la matrice des déformées modales notée par  $A_\phi$  est définie comme suit

$$A_\phi = [\phi^{(1)} \quad \phi^{(2)} \quad \phi^{(m)}]$$

avec

$$\phi^{(j)} = \{\phi_1^{(j)} \quad \phi_2^{(j)} \quad \phi_N^{(j)}\}$$

Cette méthode sera détaillée dans le chapitre 5.

### 2.7.2 Méthode fondée sur la variation relative des fréquences

Cette méthode a également été développée dans la thèse de T.T.H. Le [71]. Cette technique est fondée sur la variation relative des fréquences propres  $\frac{\Delta f_n}{f_n}$  entre deux états : de référence ou sain et modifié ou endommagé. Elle consiste à localiser l'endommagement en minimisant une fonction  $F$  qui utilise les déformées modales analytiques et leurs deux premières dérivées, les fréquences propres numériques et celles mesurées (Eq. (2.52)). Cette technique a été appliquée numériquement sur un câble, ainsi que sur des données expérimentales issues de la littérature. Les résultats de détection et de localisation sont très satisfaisants et ont prouvé l'efficacité de la méthode.

$$\frac{\Delta f_n}{f_n} \approx \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{1 + \gamma_n} \frac{\Delta T}{T} + \frac{\gamma_n}{1 + \gamma_n} \frac{\Delta EI \Delta L}{EIL} \frac{L \phi_n''^2(x_0)}{\|\phi_n''\|_2^2} - \frac{\Delta \mu \Delta L}{\mu L} \frac{L \phi_n^2(x_0)}{\|\phi_n\|_2^2} \right] \quad (2.52)$$

où  $\Delta EI(x)$ ,  $\Delta \mu(x)$  et  $\Delta T$  sont de petites perturbations de raideur, de masse linéique et de tension respectivement,  $\phi_n$  et  $\phi_n''$  sont respectivement la  $n^{\text{ème}}$  déformée modale et la dérivée seconde correspondante et  $\gamma_n$  un coefficient qui représente le rapport entre la rigidité modale due à la raideur  $EI$  et celle due à la tension  $T$ .

Le chapitre 5 s'attachera à expliquer le principe de la méthode et à proposer une amélioration de celle ci.

## 2.8 Discussion sur la variabilité naturelle des paramètres modaux

Les structures du génie civil subissent des variations climatiques, à la fois quotidiennement et annuellement, qui peuvent affecter de façon significative leur comportement vibratoire. Des études portant

sur la détection d'endommagements sur des ouvrages réels ont montré que les paramètres modaux sont très sensibles aux variations environnementales. Parmi les nombreuses variations environnementales (humidité,...) , les fluctuations thermiques semblent être, sans nul doute, les plus significatives. Des études [72, 73] ont montré que des variations relatives sur les fréquences de l'ordre de 4 à 5% pour un changement de température de 15°C étaient envisageables.

Les études expérimentales effectuées par l'EMPA et l'Université Catholique de Louvain [74] sur le pont Z24 ont apporté quelques renseignements intéressants et complémentaires sur la sensibilité des paramètres modaux aux variations climatiques. En particulier, il a été noté une variation de près de 10% sur les deux premières fréquences propres pour une variation thermique allant de -5°C à 35°C. Il a été constaté cependant que pour des essais réalisés entre 15°C et 30°C, cette variation n'était que de 2.5% [14] (Fig. 2.14).

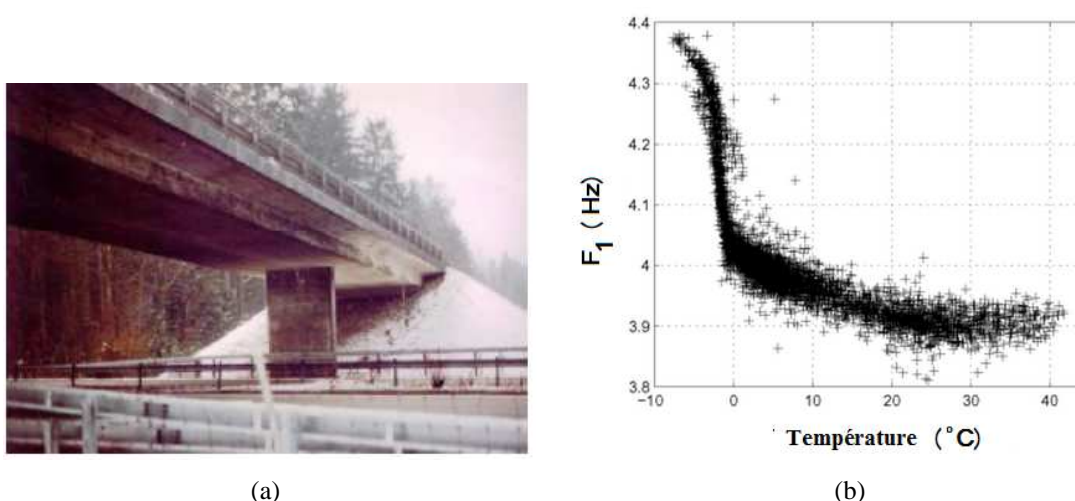


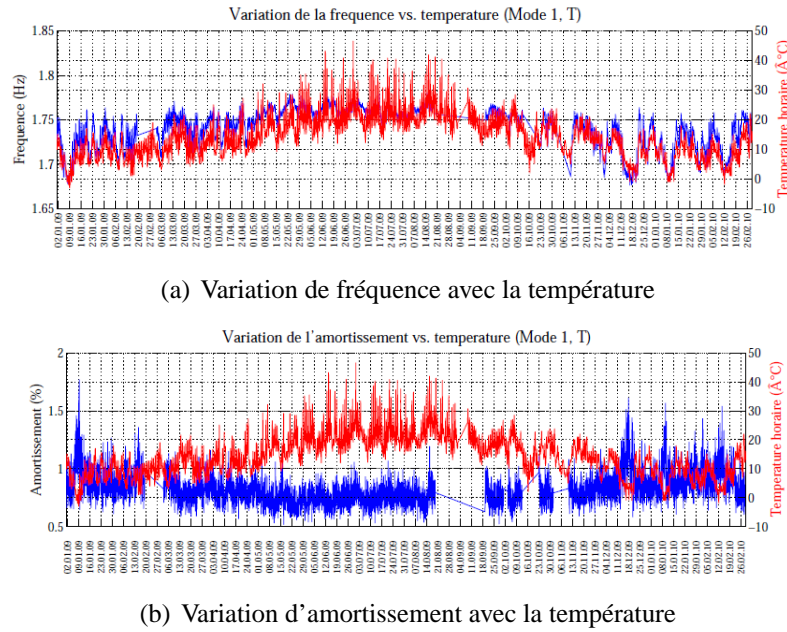
FIGURE 2.14 – Etudes des effets thermiques sur le pont Z24 (a : site d'étude Z24 , b : Evolution de la première fréquence propre en fonction de la température) [74]

Farrar et al. [75] ont pu constater avec l'étude dynamique du pont Alamosa Canyon<sup>4</sup>, une variation de 5% en moyenne sur une période de 9 mois de mesures. Or, dans [76], les auteurs ont constaté que les variations climatiques sont bien souvent supérieures à celles engendrées par un endommagement.

Des variations journalières sur la fréquence et l'amortissement des bâtiments sous vibrations ambiantes sont également observées par [77]. Le but de l'étude est d'évaluer la stabilité des mesures effectuées afin de connaître jusqu'à quelle précision il est possible de relier des variations de paramètres modaux à des variations de propriétés physiques.

A. Mikael dans sa thèse [77] a trouvé des dispersions de fréquence de 1.14% et d'amortissement de 15.6% du bâtiment de l'Ophite à Lourdes en France, entre les mois froids et humides, et les mois chauds (Fig. 2.15). Il a conclu que des variations de fréquence de 5.5% observées pendant les mois froids de l'année sur le bâtiment de l'Ophite n'indiquent pas un endommagement ou un vieillissement,

4. Pont liant le Nouveau-Mexique aux Etats-Unis



**FIGURE 2.15 – Variations de la fréquence propre et de l'amortissement modal du premier mode avec la température ambiante, du premier janvier 2009 au 28 février 2010. Bâtiment de l'Ophite, Lourdes, France [77]**

Par conséquent, les méthodes de détection d'endommagements ne permettant pas de dissocier des phénomènes globaux (variations climatiques) de phénomènes locaux (endommagements) seront difficilement applicables sur des structures réelles.

# Bibliographie

- [1] Salawu O.S., Williams C., *Assessment management and design*, Concepts of condition assessment of bridges using vibration testing and analysis, Elsevier, 1994.
- [2] Stubbs N., Sikorski C., *Structural damage assessment using advanced signal processing procedures*, Improving bridge management using NDT and quality management, Sheffield University Press, 1997.
- [3] Farrar C.R., Jauregai D.V., *Damage detection algorithms applied to experimental and numerical modal data from the I40 bridge*, LA-13074-MS, Los Alamos National Laboratory, USA, 1996.
- [4] Doebling S.W., Farrar C.R., Prime M.B., Shevitz D.W., *Damage identification and health monitoring on structural and mechanical systems from changes in their vibration characteristics : a literature review*, Report LA-13070-MS, Los Alamos National Laboratory, USA, 1996.
- [5] Lifshitz J., Rotem A., *Determination of reinforcement unbonding of composites by a vibration technique*, Journal of Composite Materials, 3(3), pp. 412-423, 1969.
- [6] Hearn G., Testa R., *Modal analysis for damage detection in structures*, Journal of Structural Engineering, 117, pp. 3042-3062, 1991.
- [7] Davini C., Morassi A., Rovere N., *Modal analysis of notched bars : tests and comments on the sensitivity of an identification technique*, Journal of Sound and Vibration, 179(3), pp. 402-416, 1995.
- [8] Loya J., Rubio L., Fernandez-Saez J., *Natural frequencies for bending vibrations of Timoshenko cracked beams*, Journal of Sound and Vibration, 290(3-5), pp. 640-653, 2006.
- [9] Narkis Y., *Identification of crack location in vibrating simply supported beams*, Journal of Sound and Vibration, 172(4), pp. 549-558, 1994.
- [10] Sinou J.-J., Lees A.W., *Influence of cracks in rotating shafts*, Journal of Sound and Vibration, 285(4-5), pp. 1015-1037, 2005.
- [11] Behtani A., Bouazzouni A., *Localisation de défauts dans les structures poutres stratifiées basée sur des données modales*, 20<sup>ème</sup> Congrès Français de Mécanique, Besançon, 2011.
- [12] Fox C.H.J., *The location of defects in structures : a Comparison of the use of natural frequency and mode shape data*, IMAC 10, San Diego, CA, Vol. 1, pp. 522-528, 1992.
- [13] Srinivasan, M.G., Kot C.A., *Effects of damage on the modal parameters of a cylindrical shell*, IMAC 10, pp.529-535, 1992.

- [14] Alvandi A., *Contribution à l'utilisation pratique de l'évaluation dynamique pour la detection d'endommagements dans les ponts*, Thèse, ENPC, 2003.
- [15] Creed S.G., *Assessment of large engineering structures using data collected during in-service loading*, Structural Assessment, F.K. Garas, J.L. Clarke and G..S.T. Armer, Butterworks, UK, pp. 55-62, 1995.
- [16] Aktan A., Lee K., Chuntavan C., Aksel T., *Modal testing for structural identification and condition assessment of constructed facilities*, Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering, SPIE International Society for Optical, pp. 462-468, 1994.
- [17] Modena C., Sonda D., Zonta D., *Damage localization in reinforced concrete structures by using damping measurements*, Proceedings of the International Conference on Damage Assessment of Structures, Dublin, Ireland, Vol.1, pp. 132-141, 1999.
- [18] Salane H.G., Baldwin J.W., *Identification of modal properties of bridges*, ASCE J. Structural Engineering, 116(7), pp.2008-2021, 1990.
- [19] Zonta D., *Structural damage detection and localization using vibrational measurements*, Thèse, Université de Bologne, 2000.
- [20] Duggan D.M., Wallance E.R., Caldwell S.R., *Measured and predicted Vibrational Behavior of Gulf of Mexico Platforms*, Offshore Technology Conference 12, pp.92-100, 1980.
- [21] Biswas M., Pandey A.K., Samman M.M., *Diagnostic experimental analysis of a highway bridge*, International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis, 5(1), pp.33-42, 1989.
- [22] Mazurek D.F., Dewolf J.T., *Experimental study of bridge monitoring technique*, ASCE Journal of Structural Engineering, 116(9), pp. 2532-2549, 1990.
- [23] Alampalli S., Fu G., Dillon E.W., *On the use of measured vibration for detecting bridge damage*, International Bridge Engineering Conference 4, pp. 125-137, 1995.
- [24] Salawu O.S., Williams C., *Bridge assessment using forced-vibration testing*, Journal of Structural Engineering, 121(2), pp. 161-173, 1995.
- [25] West W.M., *Illustration of the use of modal assurance criterion to detect structural changes in an orbiter test specimen*, IMAC 4, Los Angeles, CA, Vol.1 (A87-28526 11-39), pp. 1-6, 1986.
- [26] Allemang R.J., Brown D.L., *A correlation coefficient for modal vector analysis*, IMAC 1, pp. 110-116, 1982.
- [27] Lieven N., Ewins D. *Spatial correlation of mode shapes : the coordinate modal assurance criterion (comac)*, IMAC 6, Kissimmee, Florida, USA, Vol.1, pp. 690-695, 1988.
- [28] Ren W. X., De Roeck G., *Structural damage identification using modal data, II : Test Verification*, ASCE, Journal of Structural Engineering, 128(1), pp. 96-104, 2002.
- [29] Yuen M.M.F., *A numerical study of the eigenparameters of a damaged cantilever*, Journal of Sound and Vibration, 103, pp. 301-310, 1985.
- [30] Rizos P.F., Aspragathos N., Dimarogonas A. D., *Identification of crack location and magnitude in a cantilever from the vibration modes*, Journal of Sound and Vibration, 138(3), pp. 381-388, 1990.

- 
- [31] Osegueda R.A., Dsouza P. D., Qiang Y., *Damage evaluation of offshore structures using resonant frequency shifts*, Serviceability of Petroleum, Process and Power Equipment, ASME PVP239/MPC33, pp. 31-37, 1992.
- [32] Kam T.Y., Lee T.Y., *Detection of cracks in structures using modal test data*, Engineering Fracture Mechanics, 42(2), pp. 381-387, 1992.
- [33] Salawu O.S., Williams C., *Bridge assessment using forced-vibration testing*, Journal of Structural Engineering, 121(2), pp. 161-173, 1995.
- [34] Lam H. F., Ko J. M., Wong C. W., *Detection of damage location based on sensitivity analysis*, IMAC 13, pp. 1499-1505, 1995.
- [35] Salawu O.S., *Detection of structural damage through changes in frequency : a review*, Engineering Structures, 19(9), pp. 718-723, 1997.
- [36] Kim J.H., Jeon H.S., Lee C.W., *Application of the modal assurance criteria for detecting and locating structural faults*, IMAC 10, pp. 536-540, 1992.
- [37] Zhang Z., Aktan, A., *The damage indices for constructed facilities*, IMAC 13, Vol.1, pp. 1520-1529, 1995.
- [38] Pandey A.K., Biswas M., *Damage detection in structures using changes in flexibility*, Journal of Sound and Vibration, 169(1), pp. 3-17, 1994.
- [39] Maeck J., De Roeck G., *Damage assessment using vibration analysis on the Z24 bridge*, Mechanical Systems and Signal Processing, 17(1), pp. 133-142, 2003.
- [40] Mayes R., *An experimental algorithm for detecting damage applied to the I-40 bridge over the Rio Grande*, IMAC 13, Vol.1, pp. 219-225, 1995.
- [41] Lu Q., Ren G., Zhao Y., *Multiple damage location with flexibility curvature and relative frequency change for beam structures*, Journal of Sound and Vibration, 253(5), pp. 1101-1114, 2002.
- [42] Pandey A.K., Biswas M., Samman M.M., *Damage detection from changes in curvature mode shapes*, Journal of Sound and Vibration, 145(2), pp. 321-332, 1991.
- [43] Cumunel G., *Extensomètres à fibre optique Longue Base (ELB) pour l'évaluation dynamique des structures*, Thèse, ENPC, 2008.
- [44] Wahab A., De Roeck G., *Damage detection in bridges using modal curvatures : application to a real damage scenario*, Journal of Sound and Vibration, 226(2), pp. 217-235, 1999.
- [45] Hamming R.W., *Digital filters*, Dover Publications, INC. Mineola, New York, 1989.
- [46] Parloo E., Guillaume P., Overmeire M.V., *Damage assessment using mode shape sensitivities*, Mechanical Systems and Signal Processing, 17(3), pp. 499- 518, 2003.
- [47] Alvandi A., Cremona C., *Assessment of vibration-based damage identification techniques*, Journal of Sound and Vibration, 292, pp. 179-202, 2006.
- [48] Topole K.G., Stubbs N., *Non Destructive Damage Evaluation in Complex Structures from a Minimum of Modal Parameters*, Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis, 10(2), pp. 95-103, 1995.

- [49] Kim J.T., Stubbs N., *Assessment of the Relative Impact of Model Uncertainties on the Accuracy of Global Nondestructive Damage Detection in Structures*, Report, New Mexico University, 1993.
- [50] Alvandi A., Bastien J., Crémona C., Jolin M., *Evaluation d'endommagement par essais dynamiques*, izème colloque sur la progression de la recherche québécoise sur les ouvrages d'art, Université Laval, Quebec, Canada, 2005.
- [51] Dackerman U., *Vibration-based damage identification methods for civil engineering structures using artificial neural networks*, Thèse, Université de Technologie Sydney, 2009.
- [52] Pereyra L.R., Osegueda R.A., Carrasco C.J., Ferregut C.M., *Damage detection in a stiffened plate using modal strain energy differences. In Nondestructive Evaluation Techniques for Aging Infrastructures & Manufacturing*, International Society for Optics and Photonics, pp. 211-222, 1999.
- [53] Petro S.H., En S., GangaRao H., Venkatappa S., *Damage detection using vibration measurement*, IMAC 15, pp. 113-119, 1997.
- [54] Cornwell P., Doebling S.W., Farrar C.R., *Application of the strain energy damage detection method to plate-like structures*, Journal of Sound and Vibration, 224 (2), pp. 359-374, 1999.
- [55] Shi Z.Y., Law S.S., Zhang L.M., *Structural damage localization from modal strain energy change*, Journal of Sound and Vibration 218(5), pp. 825- 844, 1998.
- [56] Choi F.C., Li J., Samali B., Crews K., *An experimental study on damage detection of structures using a timber beam*, Journal of mechanical science and technology, 21(6), pp. 903-907, 2007.
- [57] Heylen W., Lammens S., Sas P., *Modal analysis theory and testing*, Université de Louvain, Belgique, 1995.
- [58] Sampaio R.P.C., Maia N.M.M., Silva J.M.M., *Damage detection using the frequency-response-function curvature method*, Journal of Sound and Vibration, 226(5), pp. 1029-1042, 1999.
- [59] Palacz M., Krawczuk M., *Vibration parameters for damage detection in structures*, Journal of Sound and Vibration, 249(5), pp. 999-1010, 2002.
- [60] Mallikarjuna R.D., Seetharaman S., *Application of the FRF curvature energy damage detection method to plate like structures*, World Journal of Modelling and Simulation, 8(2), pp. 147-153, 2012.
- [61] Deraemaeker A., Preumont A., *Vibration based damage detection using large array sensors and spatial filters*, Mechanical Systems and Signal Processing, 20(7), pp. 1615-1630, 2006.
- [62] Preumont A., Francois A., Man P.D., Piefort V., *Spatial filters in structural control*, Journal of Sound and Vibration, 265(1), pp. 61-79, 2003.
- [63] Yan G., Duan Z., Ou J., De Stefano A., *Structural damage detection using residual forces based on wavelet transform*, Mechanical Systems and Signal Processing, 24(1), pp. 224-239, 2010.
- [64] Quek S., Wang Q., Zhang L., Ang K., *Sensitivity analysis of crack detection in beams by wavelet technique*, International Journal of Mechanical Sciences, 43(12), pp. 2899-2910, 2001.



- 
- [65] Berman A., Nagy E., *Improvement of a large analytical model using test data*, AIAA journal, 21(8), pp.1168-1173, 1993.
- [66] Levin R., Lieven N., *Required precision and valid methodologies for dynamic finite element model updating*, ASME Journal of Vibration and Acoustics, 120(3), pp. 733-741, 1998.
- [67] Friswell M., Inman D., *Sensor validation for smart structures*, IMAC 18, pp.483-489, 2000.
- [68] Natke H., *Problems of model updating procedures : a perspective resumption*, Mechanical Systems and Signal Processing, 12(1), pp. 65-74, 1998.
- [69] Casas J., Aparicio A., *Structural damage identification from dynamic-test data*, Journal of structural engineering New York, 120(8), pp. 2437-2449, 1994.
- [70] Saeed K., *Contribution à la surveillance de l'intégrité de structures*, Thèse, École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers, 2010.
- [71] Le T.T.H., *Contribution à la détection et à la localisation d'endommagements par des méthodes d'analyse dynamique des modifications structurales d'une poutre avec tension - Application au suivi des câble du génie civil*, Thèse, ENPC, 2014.
- [72] Roberts G.P., *Analysis and Testing of Bridges*, One-Day Seminar, ISTRUCE/SECED, Londres, 1995.
- [73] Wahab A., Roeck G., *Effect of temperature on dynamic system parameters of a highway bridge*, Structural Engineering International, IABSE, 7(4), pp. 266-270, 1997.
- [74] Peeters B., De Roeck, G. *One-year monitoring of the Z24-Bridge : environmental effects versus damage events*, Earthquake engineering & structural dynamics, 30(2), pp. 149-171, 2001.
- [75] Doebling S.W., Farrar C.R., Cornwell P.J., *A Statistical Comparison of Impact and Ambient Testing Results from the Alamosa Canyon Bridge*, IMAC 15, pp. 264-270, 1997.
- [76] Farrar C.R., Cornwell P.J., Doebling S.W., Prime M.B., *Structural health monitoring studies of the alamosa canyon and I40 bridges*, Report, Los Alamos National Laboratory, 2000.
- [77] Mikael A., *Evaluation des paramètres physiques des bâtiments : amortissement, fréquence et modes de comportement des structures de génie civil : Approche expérimentale*, Thèse, Université de Grenoble, 2011.

## Chapitre 3

# Optimisation du placement de capteurs

---

**C** E CHAPITRE est consacré au principe de placement optimal des capteurs sur une structure pour la mesure de vibrations et la détection d'endommagement. La formulation du problème sera établie tout en évoquant les différentes méthodes utilisées dans la littérature.

---

**Plan du Chapitre 3**

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction . . . . .</b>	<b>45</b>
<b>3.2</b>	<b>Modèle du placement de capteurs . . . . .</b>	<b>45</b>
<b>3.3</b>	<b>Méthodes de placement des capteurs de vibrations . . . . .</b>	<b>46</b>
3.3.1	Méthode basée sur l'énergie cinétique modale . . . . .	47
3.3.2	Effective independence method . . . . .	48
3.3.3	Optimum Driving Point (ODP) Based Method . . . . .	49
3.3.4	Non-Optimum Driving Point (NODP) based method . . . . .	49
3.3.5	La méthode de décomposition en QR . . . . .	49
3.3.6	L'algorithme MinMAC . . . . .	49
3.3.7	Rapport de décomposition en valeurs régulières (RDVS) . . . . .	50
3.3.8	Fonctions du placement optimal . . . . .	50
3.3.9	Applications dans la littérature . . . . .	52
<b>3.4</b>	<b>Principes d'acquisition des déformées modales . . . . .</b>	<b>52</b>
<b>3.5</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>56</b>
	<b>Bibliographie . . . . .</b>	<b>56</b>

---

### 3.1 Introduction

La surveillance de santé des structures doit fournir des informations sur le fonctionnement et la performance de celles-ci permettant la réduction des coûts d'exploitation en effectuant de la maintenance préventive. En général, le système de suivi de l'état des structures comprend trois composantes principales : un système de capteur, un système de traitement de données (données d'acquisition, transmission et stockage), et un système d'évaluation de l'état de santé (algorithmes de diagnostic). Les capteurs utilisés sont nécessaires non seulement pour surveiller l'état structurel, comme les contraintes, le déplacement, l'accélération, etc, mais aussi les paramètres environnementaux, tels que la vitesse du vent, la variation de température, l'humidité... Un grand nombre de capteurs est indispensable à un système de surveillance de santé des structures. Par exemple, 786 capteurs sont installés de façon permanente sur le pont TsingMa [1]. Afin de réduire les coûts, le but est donc de déployer aussi peu de capteurs que possible sur une structure.

Néanmoins, un grand nombre de capteurs, tels que les capteurs de vitesse et les jauges de déformation, sont installés sur une structure en fonction de leurs caractéristiques [2]. Par conséquent, les méthodes de placement de capteurs dans la recherche concernent principalement le placement d'accéléromètres pour la surveillance de santé des structures. En effet, bien qu'il y ait 33, 65 et 72 accéléromètres instrumentés respectivement, sur les ponts TsingMa, TingKau à Hong Kong et Jiangyin Jiangsu en Chine, et 116 accéléromètres sur le pont Anhui Tongling en Chine [3], le nombre d'accéléromètres utilisés est faible par rapport aux possibilités de placement sur la structure [4, 5]. En outre, la position des capteurs détermine la qualité des paramètres modaux identifiés. Par conséquent, déployer de façon optimale les capteurs de sorte à obtenir la meilleure identification des caractéristiques modales est une tâche complexe.

La mesure du comportement vibratoire d'une structure nécessite l'évaluation des modes propres. Puisque les modes propres influencent la précision des mesures, les capteurs de vibration (accéléromètres, capteurs de vitesse, capteurs de déplacement ou capteurs extensométriques) doivent être positionnés dans les régions où la vibration du mode propre est importante.

Pour l'analyse de la réponse dynamique de la structure, discrétisée par EF par exemple, il faut sélectionner une partie des nœuds s'il faut placer des capteurs aux nœuds.

### 3.2 Modèle du placement de capteurs

Le problème de la position des capteurs peut être étudiée à partir des coordonnées modales découplées comme suit [6][7] :

$$\begin{cases} \ddot{q} + M^{-1}C\dot{q} + M^{-1}Kq &= M^{-1}\phi^T F \\ Y &= \phi q + \varepsilon \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $q$  est le vecteur modal,  $M$ ,  $K$  et  $C$  sont les matrices de masse, de rigidité et d'amortissement respectivement,  $\phi$  est la matrice des modes propres,  $F$  est le vecteur de force,  $Y$  est le vecteur co-

lonne des mesures indiquant les positions possibles des capteurs et  $\varepsilon$  est un bruit blanc Gaussien, de moyenne nulle et de variance  $\sigma_0^2$ .

Il convient de noter que la 2<sup>ème</sup> équation est une transformation de l'équation générale du mouvement dynamique d'une structure  $M\ddot{Y} + C\dot{Y} + KY = F$  avec  $Y$  remplacé par  $\phi.q$  et l'équation multipliée par  $\phi^T$  afin de découpler le système d'équations. En fait, on a  $\ddot{Y} = \phi\ddot{q} + \varepsilon$  si l'accélération est mesurée. Les deux équations de mesure (de déplacement et d'accélération) sont cependant identiques dans la formulation mathématique du problème.

Le problème de placement des capteurs est essentiellement divisé en trois aspects [8] :

- Quel est le nombre minimal d'accéléromètres nécessaire à installer sur une structure pour la surveillance de son état de santé ?
- Où faut-il installer ces accéléromètres, y compris ceux qui sont supplémentaires, si disponibles ?
- Comment pourrions-nous évaluer l'efficacité des différentes méthodes de placement des capteurs ?

Ces trois aspects sont en effet couplés mais le problème principal réside dans le deuxième point, qui dépend toutefois du troisième point [8, 9].

Le premier problème peut être considéré comme partiellement résolu sur une structure. En effet, il est connu que le nombre minimum de capteurs qui doit être instrumenté ne peut pas être inférieur au nombre de modes propres étudiés. En pratique, le nombre de capteurs, qui est prédéfini avant les expériences, suivant la disponibilité du matériel et de l'équipement, est généralement plus grand que le nombre minimal requis [9].

Le deuxième point, qui dépend en grande partie du troisième aspect, est le problème essentiel. Nous supposons ici que le nombre total de ddl de la structure décrite dans le Modèle (1) est  $n$ , le nombre de modes propres utilisés pour le positionnement des capteurs est  $m$  et le nombre de capteurs disponibles est  $s$  ( $s < n$ ). Le problème du placement des capteurs devient donc, essentiellement, où instrumenter les  $s$  accéléromètres disponibles sur les  $n$  degrés de liberté d'une structure pour réaliser les essais dynamiques, c'est-à-dire quelles lignes du vecteur  $Y$  dans l'équation (3.1) doivent être sélectionnées. Ceci revient à sélectionner  $s$  lignes sur un total de  $n$  lignes de la matrice rectangulaire du mode propre  $\phi$  ( $\phi \in R^{n \times m}$ ) pour former une sous-matrice  $A$  ( $A \in R^{s \times m}$ ) [21].

Par conséquent, la question du positionnement des capteurs peut être essentiellement considérée comme un problème d'optimisation. C'est un problème complexe de combinaisons qui n'a jusqu'à présent pas de solution analytique déterministe [10].

### 3.3 Méthodes de placement des capteurs de vibrations

Le problème est donc de proposer une méthodologie qui maximise la probabilité de détection d'endommagement en imposant une configuration optimale du placement des capteurs, ce qui signifie

minimiser le nombre de capteurs sur la structure. Différentes techniques ont été proposées sur le placement optimal des capteurs et ceci en utilisant plusieurs approches intuitives ou heuristiques. Bruant et al. [11] ont développé également une méthodologie pour la détermination du positionnement des actionneurs et des capteurs sur les poutres. Ils ont proposé de minimiser l'énergie mécanique pour trouver le placement optimal des actionneurs et maximiser la matrice d'observabilité pour le placement optimal des capteurs.

La méthode heuristique d'inspection visuelle est la plus simple parmi les méthodologies de placement des capteurs proposées et c'est peut-être la première méthode utilisée avant même que le problème d'optimisation de placement des capteurs soit sérieusement abordé. Avec cette méthode, les réponses dynamiques d'une structure sont d'abord traitées et les modes propres sont examinés. Les endroits de forte amplitude sont alors sélectionnés. Cette méthode dépend de l'expérience des ingénieurs.

Li et al. [12] ont étudié le placement optimal des capteurs pour la mesure de vibration et le SHM. Ils ont présenté une nouvelle méthode fondée sur des fonctions objectif qui permettent de déterminer le placement optimal des capteurs pour la mesure des vibrations. Les capteurs doivent être placés soit à l'endroit où l'amplitude de vibration est importante.

#### 3.3.1 Méthode basée sur l'énergie cinétique modale

La première stratégie de placement des capteurs utilisée est la méthode de l'énergie cinétique modale, ou MKE pour Modal Kinetic Energy method, qui est une extension des méthodes d'inspections visuelles traditionnelles. La méthode MKE examine les modes propres étudiés et sélectionne les positions où les amplitudes de réponses sont élevées à partir de l'expression ci-dessous :

$$MKE_{pq} = \phi_{pq} \sum_k M_{pk} \phi_{kq} \quad (3.2)$$

où  $MKE_{pq}$  est l'énergie cinétique associée au ddl  $p$  du mode propre  $q$ ,  $\phi_{pq}$  est le  $p^{\text{ème}}$  élément du mode propre  $q$ ,  $M_{pk}$  est le terme de la  $p^{\text{ème}}$  ligne et de la  $k^{\text{ème}}$  colonne de la matrice de masse obtenue par un modèle EF et  $\phi_{kq}$  le  $k^{\text{ème}}$  élément du mode propre à étudier [13]. Les modes propres sélectionnés doivent représenter le maximum d'énergie dans la réponse.

La technique de l'énergie cinétique évalue la contribution dynamique de chaque ddl du modèle EF pour chacun des modes propres étudiés et fournit une idée approximative de l'endroit où les réponses maximales pourraient être mesurées. Elle permet donc de détecter les ddl pouvant fournir les caractéristiques dynamiques nécessaires de la structure et de les choisir comme positions de capteurs possibles dans les essais dynamiques [14].

### 3.3.2 Effective independence method

La méthode Effective Independence (EI) est une méthode couramment utilisée qui a été proposée et utilisée par Kammer [14] et également recommandée par Ewins [15] et Friswell et al. [16]. La méthode quantifie l'indépendance entre deux ou plusieurs modes propres. Cette méthode a été appliquée dans différents essais dynamiques.

C'est une méthode itérative qui utilise un modèle numérique EF et qui trie les nœuds en fonction de leur sensibilité à la bonne représentation des modes propres. Un nœud ou un ddl de la structure possèdera un indice élevé, noté  $E_D$ , lorsqu'il participe fortement à l'indépendance linéaire du réseau de capteurs recherché. Ainsi, le nœud avec le  $E_D$  le plus faible est éliminé de la matrice modale  $\phi$ . L'objectif de l'*EI* est alors de sélectionner les points de mesure qui permettent d'avoir des modes propres indépendants tout en conservant l'information dynamique nécessaire. Les itérations de l'élimination se poursuivent jusqu'à ce qu'il reste autant de nœuds que de capteurs disponibles. Une décomposition  $\phi = QR$  permet d'accélérer le processus en évitant l'inversion de la matrice modale et réduit les erreurs d'arrondi.

La méthode consiste donc à estimer les paramètres modaux et aboutir à la maximisation de la matrice de Fisher, c'est-à-dire à la minimisation de la matrice de covariance :

$$E[(q - \hat{q})(q - \hat{q})^T] = \left[ \frac{1}{\sigma_0^2} \phi^T \phi \right]^{-1} = Q^{-1} \quad (3.3)$$

où  $Q$  est la matrice de Fisher,  $\sigma_0^2$  représente la covariance d'un bruit gaussien  $\varepsilon$  et  $\hat{q}$  est le vecteur estimateur de  $q$ . Maximiser  $Q$  fournit une bonne estimation de  $q$ . En pratique, on commence par résoudre l'équation aux valeurs propres :

$$[\phi^T \phi - \lambda I] \Psi = 0 \quad (3.4)$$

où  $\Psi$  représentent les vecteurs propres orthogonaux de  $Q$ . Les coefficients d'indépendance  $E_D$  des positions candidates sont calculées par la formule suivante :

$$E_D = [\phi \Psi]^2 \cdot \lambda^{-1} \cdot 1_n \quad (3.5)$$

où  $1_n$  est un vecteur colonne de dimension  $n$  ayant pour éléments l'unité.

Pour maximiser le déterminant de  $Q$ , le capteur correspondant à la plus faible valeur  $E_D$  est éliminé de la série initiale des positions proposées. Les coefficients de  $E_D$  seront ensuite recalculés en fonction de la nouvelle matrice réduite de chacun des modes propres. Ce processus est répété de manière itérative jusqu'à ce que le nombre de capteurs soit égal au nombre de capteurs prédéterminé. Les degrés de liberté restants seront donc les points de mesure où il faut instrumenter les accéléromètres.

### 3.3.3 Optimum Driving Point (ODP) Based Method

Dans le but d'identifier les points nodaux des modes propres<sup>1</sup>, les constantes modales de tous les modes propres choisis sont multipliées par le ddl correspondant [17, 18]. Le résultat donne un coefficient appelé paramètre ODP pour chaque ddl  $i$  et qui est exprimé par :

$$ODP_i = \prod_{k=1}^N ||\phi_{ik}|| \quad (3.6)$$

Les ddl ayant un ODP proche de zéro sont les ddl qui sont proches ou sur une ligne nodale et sont par conséquent à éviter comme positions de mesure.

### 3.3.4 Non-Optimum Driving Point (NODP) based method

Cette méthode utilise la technique du paramètre NODP [14], qui pour chaque ddl dans une bande de fréquence spécifiée, identifie la position de ce degré de liberté par rapport à une ligne nodale d'un mode propre. La technique consiste en un algorithme qui élimine les positions des capteurs ayant des NODP minimums :

$$NODP_i = \min_k |\phi_{ik}| \quad (3.7)$$

### 3.3.5 La méthode de décomposition en QR

La méthode de décomposition QR (QRD) proposée par Schedlinski et Link [19] vise à trouver un sous-ensemble des ddl d'un modèle analytique servant de points de mesure, de telle sorte que l'indépendance linéaire entre les modes propres mesurés soit maximale.

### 3.3.6 L'algorithme MinMAC

L'algorithme MinMAC proposé par Carne et Dohrmann [20] vise à assurer la corrélation entre les modes propres calculés par un modèle EF et ceux mesurés ou identifiés par des essais dynamiques. Ceci est équivalent à réduire au minimum le produit entre ces modes. En effet, les valeurs faibles de la diagonale de la matrice  $MAC$  indique une faible corrélation entre les modes propres, et les rend indiscernables l'un de l'autre. C'est la raison pour laquelle l'objectif est de minimiser les termes hors-diagonaux de la matrice  $MAC$ .

Par conséquent, l'algorithme MinMAC vise cet objectif. Tout d'abord, une série de capteurs (beaucoup moins que le nombre de capteurs requis) est sélectionné selon les exigences de la structure pour visualiser les déformées modales. Puis, d'autres capteurs disponibles seront ajoutés, un par un, en choisissant toutefois le capteur qui minimise la valeur maximale des éléments hors-diagonaux de la matrice  $MAC$ . La seconde étape est répétée de manière itérative en ajoutant à chaque fois un capteur jusqu'à ce que le nombre de capteurs requis soit sélectionné.

---

1. Les points nodaux sont les nœuds des modes propres donc où  $\phi_k(x) = 0$



### 3.3.7 Rapport de décomposition en valeurs régulières (RDVS)

La décomposition en valeurs singulières de la matrice des modes propres permet une autre configuration de l'emplacement des capteurs. La méthode évalue le rapport entre la plus grande et la plus petite valeur singulière de la matrice. La limite inférieure de la RDVS est atteinte dans le cas où les modes propres sont orthogonaux.

D'autres méthodes de placement optimal des capteurs et leurs applications se trouvent dans la thèse de D. Li [21].

### 3.3.8 Fonctions du placement optimal

Soit  $\phi$  la matrice des  $m$  modes propres obtenus par l'analyse d'une structure en vibrations libres :

$$\phi = [\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots] \quad (3.8)$$

Selon le niveau de corrélation entre le mode propre du modèle de la structure et le mode propre mesuré, il est possible de juger de la sensibilité du positionnement des capteurs. Pour cela différentes fonctions objectif qui sont simples à implémenter ont été définies [12].

#### Fonction type 1

Considérons une structure avec  $n$  degrés de libertés, ou  $n$  nœuds, parmi lesquels  $m$  points définissent les positions des capteurs. Une fonction objectif est définie comme suit :

$$f_1(r) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left| \sum_{r \in 0} \phi_{rj} \phi_{rk} \right| \quad (3.9)$$

où  $\phi_{rj}$  est le  $r^{\text{ème}}$  élément du mode d'indice  $j$ .  $r \in 0$  signifie une série de  $r$  points sur lesquels il n'y a pas de capteurs. Le problème se trouve alors dans la détermination de la valeur minimale de la fonction  $f_1$  pour que les parties non mesurées de la structure n'aient pas d'influence sur la précision des résultats.

#### Fonction type 2

Le Modal Scale Factor,  $MSF$ , est utilisé récemment pour évaluer la corrélation entre deux modes. Si nous considérons deux modes,  $\phi_a$  et  $\phi_b$ , la corrélation entre eux est définie par la formule suivante :

$$MSF(\phi^a, \phi^b) = \frac{\phi^{bT} \phi^b}{\phi^{aT} \phi^a} \quad (3.10)$$

Si ces deux modes sont complètement corrélés, la valeur de  $MSF$  est égale à 1.

Soit une structure avec  $n$  degrés de libertés, ou  $n$  nœuds, parmi lesquels  $m$  points définissent les positions des capteurs. En considérant les  $N$  premiers modes de vibration, une fonction objectif est

définie par :

$$f_2(\phi^a, \phi^b) = \sum_{k=1}^N \frac{\phi_k^{bT} \phi_k^b}{\phi_k^{bT} \phi_k^a} \quad (3.11)$$

avec  $\phi_k^a = [\phi_{1k}^a, \phi_{2k}^a, \dots, \phi_{nk}^a]$  et  $\phi_k^b = [\phi_{1k}^b, \phi_{2k}^b, \dots, \phi_{nk}^b]$ , avec  $\phi_{ik}^a = \phi_k^a(x_i)$  étant

où  $\phi_k^a$  est le  $k^{\text{ème}}$  mode propre obtenu par le calcul et  $\phi_k^b$  est le  $k^{\text{ème}}$  mode propre mesuré avec  $m$  points. Les valeurs des modes propres aux autres  $(n - m)$  points, où il n'y a pas de capteurs, sont obtenues par interpolation. Lorsque la sélection du placement des capteurs est optimale, on a :

$$f_2(\phi^a, \phi^b) \rightarrow N$$

#### Fonction type 3

Le Modal Assurance Criterion  $MAC$  (Eq. (3.12)) est aussi utilisé pour évaluer la corrélation entre deux modes. Il est défini comme le scalaire reliant deux vecteurs modaux  $\phi_a$  et  $\phi_b$  :

$$MAC(\phi^a, \phi^b) = \frac{(\phi^{aT} \phi^b)^2}{(\phi^{aT} \phi^a)(\phi^{bT} \phi^b)} \quad (3.12)$$

Si ces deux modes sont complètement corrélés, la valeur de  $MAC$  est égale à 1.

Soit une structure avec  $n$  nœuds parmi lesquels  $m$  points définissent les positions des capteurs. En considérant les  $N$  premiers modes de vibration, une fonction objectif est définie par :

$$f_3(\phi^a, \phi^b) = \sum_{k=1}^N \frac{(\phi_k^{aT} \phi_k^b)^2}{(\phi_k^{aT} \phi_k^a)(\phi_k^{bT} \phi_k^b)} \quad (3.13)$$

où  $\phi_k^a$  est le  $k^{\text{ème}}$  mode propre obtenu par le calcul et  $\phi_k^b$  est le  $k^{\text{ème}}$  mode propre mesuré avec  $m$  points. Les valeurs des modes propres aux autres  $(n - m)$  points, où il n'y a pas de capteurs, sont également obtenues par interpolation. Lorsque la sélection du placement des capteurs est optimale, on a comme précédemment :

$$f_3(\phi^a, \phi^b) \rightarrow N$$

#### Fonction type 4

La corrélation entre deux modes  $\phi_a$  et  $\phi_b$  peut être définie cette fois par (Eq.(3.14)) :

$$M_c(\phi^a, \phi^b) = \frac{(\phi^a - \phi^b)^2}{\phi^{aT} \phi^b} \quad (3.14)$$

Si ces deux modes sont complètement corrélés, la valeur de  $M_c$  est égale à 0.

Soit une structure avec  $n$  degrés de libertés, ou  $n$  nœuds, parmi lesquels  $m$  points définissent les positions des capteurs. En considérant les  $N$  premiers modes de vibration, une fonction objective est

définie comme :

$$f_4(\phi^a, \phi^b) = \sum_{k=1}^N \frac{(\phi_k^a - \phi_k^b)^2}{\phi_k^{aT} \phi_k^b} \quad (3.15)$$

où  $\phi_k^a$  est le  $k^{\text{ème}}$  mode propre obtenu par le calcul et  $\phi_k^b$  est le  $k^{\text{ème}}$  mode propre mesuré avec  $m$  points. Les valeurs des modes propres aux autres  $(n - m)$  points, où il n'y a pas de capteurs, sont obtenues par interpolation. Lorsque la sélection du placement des capteurs est optimale, on a :

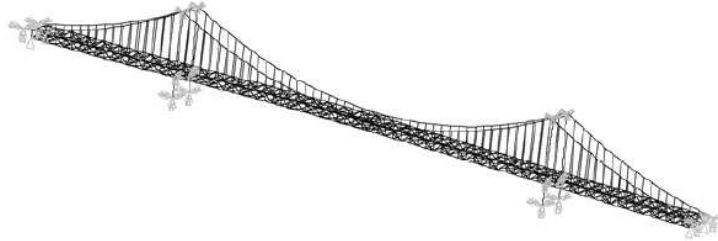
$$f_4(a, b) \rightarrow 0$$

### 3.3.9 Applications dans la littérature

Li et al. [22] ont appliqué quatre méthodes sur le pont Xinghai Bay <sup>2</sup> présenté sur la figure 3.1(a) qui sont : EI, EI-DPR, minMAC et PSS-EI <sup>3</sup>. Un modèle éléments finis 3D du pont Xinghai Bay a été créé en utilisant le logiciel commercial ANSYS (Fig. 3.1(b)). Les paramètres sont extraits à partir de la méthode des sous-espaces.



(a)



(b)

FIGURE 3.1 – (a) Vue du pont Xinghai Bay (b) modèle EF [22].

Ils ont trouvé que l'application de la méthode EI pour le placement optimal génère une configuration de capteurs uniformément espacés sur la longueur de la poutre en treillis (Fig. 3.2(a)). Par contre, l'emplacement des capteurs déterminé par la méthode minMAC a tendance à être concentré uniquement à mi-portée (Fig. 3.2(b)).

## 3.4 Principes d'acquisition des déformées modales

Dans [24], Sazonov et al. ont estimé des paramètres optimaux d'échantillonnage spatial grâce à des calculs analytiques et des simulations dynamiques sur des poutres. Beaucoup de chercheurs, qui étu-

2. Le pont Xinghai Bay en Chine est formé de trois travées, avec une travée principale de 460 m et deux travées de rive de 180 m chacune.

3. Les méthodes EI-DPR et PSS-EI sont détaillées respectivement dans [18] et [23]

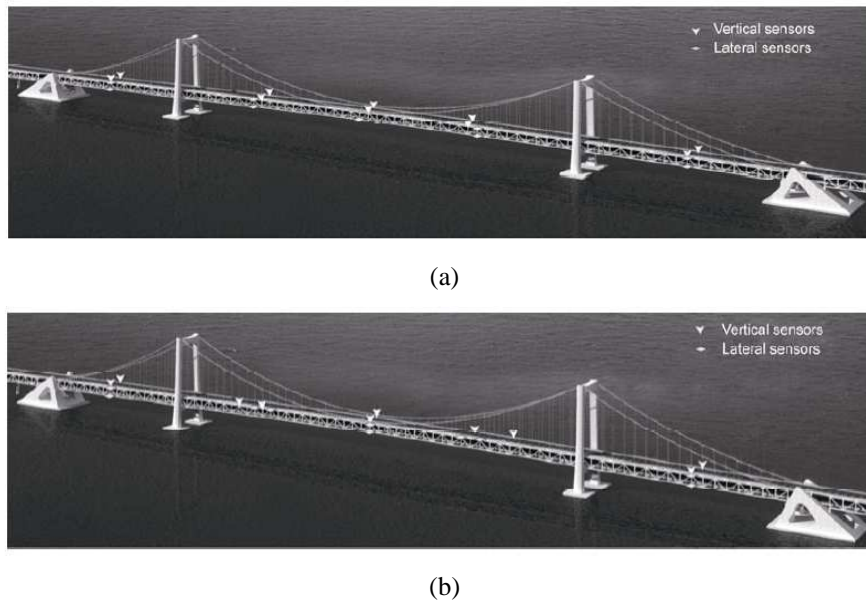


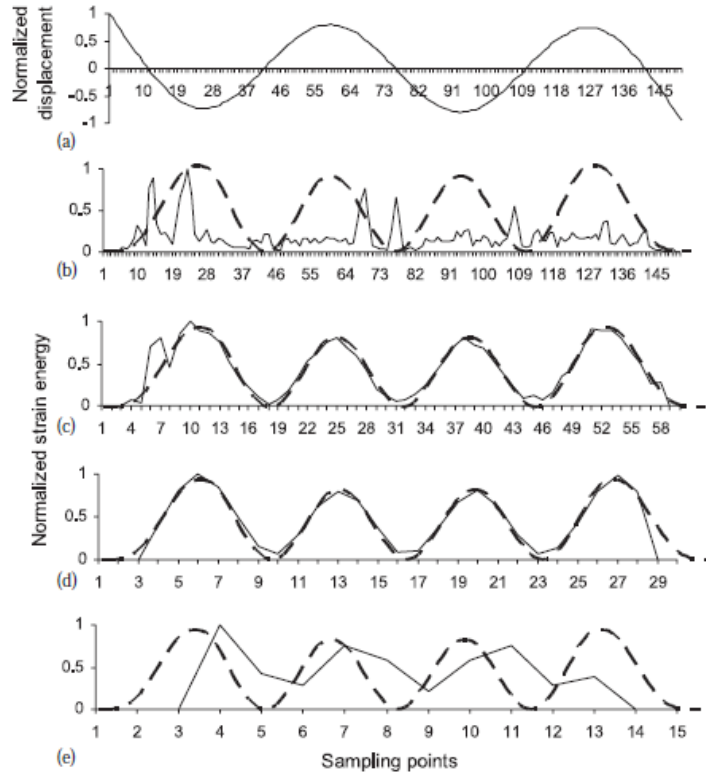
FIGURE 3.2 – (a) Méthode EI (b) Méthode MinMAC [22]

dient l'effet de la résolution spatiale sur la détection de défauts, pensaient que plus il y avait de points de mesure, meilleure était l'identification du défaut. Or, les mesures sont soumises au bruit et l'expérimentation démontre qu'il faut prendre en compte cette limitation lors de la conversion analogique/numérique du signal. Ainsi, Sazonov démontre, en utilisant un vibromètre laser, que le calcul de la courbure modale ou l'estimation de l'énergie de déformation sont très sensibles à l'échantillonnage spatial. En effet, le calcul de dérivées numériques utilisant les différences finies est sensible au bruit dans les données et un échantillonnage trop faible peut conduire à une déformée modale imparfaite (erreur de troncature).

Dans l'exemple de Sazonov et al., le 4<sup>ème</sup> mode d'une poutre libre-libre en aluminium est obtenu à l'aide d'un vibromètre laser. Le calcul des courbures modales est ainsi effectué pour plusieurs résolutions spatiales (Fig. 3.3).

Sur la figure 3.3, les deux courbures calculées avec peu de points (15) et trop de points (150) ne permettent pas de conclure. Par contre, la courbure calculée avec 30 points fournit la meilleure approximation de la courbure modale du 4<sup>ème</sup> mode avec le moins de faux pics, en utilisant un intervalle d'échantillonnage spatial optimal. La réponse à la question sur la détermination de l'intervalle d'échantillonnage spatial optimal pour les déformées modales et les courbures modales semble être une corrélation entre le bruit de mesure et les propriétés numériques des méthodes de calcul utilisées pour calculer la courbure. Il faut donc faire un compromis. Sazonov fournit une justification analytique et numérique pour la sélection de l'intervalle d'échantillonnage spatial approprié afin d'effectuer une détection optimale des endommagements à partir de la courbure modale.

Le calcul de la courbure des déformées modales est généralement effectuée à l'aide de l'expression de la différence finie centrée et avec un lissage à l'aide d'un polynôme optimal de degré 2 construit



**FIGURE 3.3 – (a) 4<sup>ème</sup> déformée modale d’une poutre L-L intacte. Les courbes en trait plein représentent la 4<sup>ème</sup> courbure modale déterminée pour différentes résolutions spatiales (b) 150 points ; (c) 60 points ; (d) 30 points ; (e) 15 points. Les courbes en pointillés représentent la courbure modale idéale [24].**

avec 5 points de mesure [26].

$$\phi_k(x_i) = \frac{-3\phi_k(x_{i-2}) + 12\phi_k(x_{i-1}) + 17\phi_k(x_i) + 12\phi_k(x_{i+1}) + 12\phi_k(x_{i+2})}{35h^2} \quad (3.16)$$

Par conséquent, la résolution spatiale (inverse de l’intervalle d’échantillonnage  $h$ ) choisie pour les déformées modales doit être suffisamment élevée afin d’éviter les erreurs de troncature et, en même temps, suffisamment faible pour éviter des erreurs dues à la perturbation dans les mesures.

Sazonov et al. partent de la formule de l’expression de la courbure pour estimer l’échantillonnage optimal par :

$$h_{opt} = \sqrt[4]{\varepsilon F_4} \quad (3.17)$$

où  $F_4$  est l’erreur de troncature estimée analytiquement pour différentes conditions aux limites (Tab. 3.1) et  $\varepsilon$  est l’écart type du bruit de mesure, soit :

$$F_4 = \max_{x \in (0, L)} \left( \frac{12|\phi_k(x_{i+1})| + 24|\phi_k(x_i)| + 12|\phi_k(x_{i-1})|}{M_4} \right) \quad (3.18)$$

où  $M_4 = \max_{[x_0-h, x_0+h]} |\phi_k^{(4)}(x)|$  avec  $\phi_k^{(4)}(x)$  la dérivée 4<sup>ème</sup> de  $\phi_k(x)$  et  $x_0 \in (0, L)$ .

Une observation intéressante de l’équation (3.17) est que le fait de doubler la résolution spatiale nécessite de diminuer le bruit de mesure d’un facteur 16. Sazonov et al. [24] démontrent aussi que

Conditions limites	Mode n° 1	Mode n° 2	Mode n° 3	Mode n° 4	Mode n° 5
EE ou LL	0.09588	0.01261	0.003282	0.001201	0.000538
EL	3.6864	0.09885	0.0126	0.003282	0.001201

TABLEAU 3.1 – Estimation numérique de  $F_4$  pour différentes conditions aux limites [24]

Conditions limites	Mode n° 1	Mode n° 2	Mode n° 3	Mode n° 4	Mode n° 5
EE ou LL	0.4233	0.1446	0.07482	0.04534	0.02823
EL	3.679	0.7275	0.2608	0.1313	0.07949

TABLEAU 3.2 – Estimation numérique de  $\alpha$  pour différentes conditions aux limites [24]

l'intervalle d'échantillonnage minimum pour lequel l'erreur provenant du bruit de mesure ne domine pas les résultats de calcul de la déformée est :

$$h_{min} = \sqrt{\frac{\alpha}{2} - 0.5\sqrt{\alpha^2 - 4\varepsilon F_4}} \quad (3.19)$$

alors que l'échantillonnage maximal vaut :

$$h_{max} = \sqrt{\frac{\alpha}{2} + 0.5\sqrt{\alpha^2 - 4\varepsilon F_4}} \quad (3.20)$$

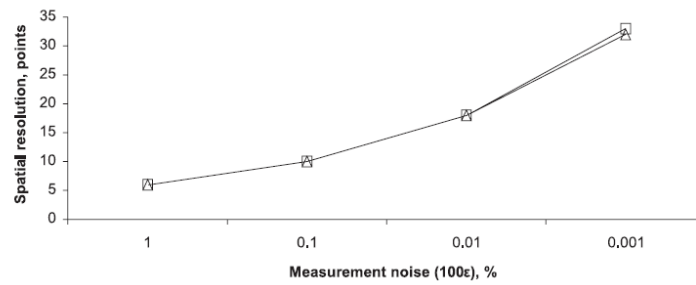
avec  $\alpha = \frac{12M_2}{M_4}$  où  $M_2 = \max_{[0,L]} |\phi''(x)|$

Le tableau 3.2 montre les valeurs de  $\alpha$  (cas d'une poutre de longueur unité  $L=1m$ ), qui peuvent être utilisées dans le calcul de  $h_{opt}$ .

Quelques remarques sur l'échantillonnage spatial optimal [25] sont soulevées à partir des équations (3.17), (3.19) et (3.20) :

- L'échantillonnage spatial optimal augmente avec le numéro du mode. Les modes élevés exigent plus de points de mesure pour être bien déterminés.
- L'intervalle de résolution  $[\frac{1}{h_{max}} \quad \frac{1}{h_{min}}]$  augmente lorsque le niveau de bruit diminue.
- L'échantillonnage maximal dépend du numéro du mode étudié.
- L'échantillonnage augmente (Fig. 3.4) lorsque le niveau de bruit augmente : pour une courbure modale parfaite, l'effet du bruit doit être compensé avec le nombre de points de mesure.

La dernière remarque concerne le niveau de bruit  $\varepsilon$ . Les développements de Sazonov ont mis en évidence l'influence du bruit de mesure sur la précision des résultats avec l'approche des différences finies centrées, cependant sa détermination reste complexe. En effet, chaque composant du système d'acquisition de données a ses propres caractéristiques. Par exemple, un accéléromètre peut avoir 1%



**FIGURE 3.4 – Comparaison de la résolution optimale déterminée analytiquement (triangle) et numériquement (carré) pour les courbures modales [24]**

de précision, mais c'est l'erreur totale de la chaîne d'acquisition qui doit être examinée.

### 3.5 Conclusion

Différentes techniques de placement optimal ont été développées par les chercheurs afin de mesurer les vibrations d'une structure excitée et faire le SHM. Il a été démontré que les résultats du placement et du nombre de capteurs fournis par deux méthodes peuvent être différents. Par ailleurs, des études ultérieures sont à prévoir afin d'adapter les méthodes présentées ci-dessus pour le cas de capteurs longue base.

# Bibliographie

- [1] Ko J. M., Ni Y. Q., Sun Z. G. Chan, H. T., *Remote visualized health monitoring of cable-supported bridges*, Proceedings of SPIE : Smart Structures and Materials and Nondestructive Evaluation for Health Monitoring and Diagnostics, Vol. 4337, 368-378, 2003.
- [2] Farrar C.R., Lieven N.A.J., *Damage prognosis : the future of structural health monitoring*, Philosophical Transactions of the Royal Society Mathematical Physical and Engineering Sciences, Vol. 365, 623-632, 2007.
- [3] Liu X., Cai J., Liu H., *Bridge damage diagnosis*, China Communications Press, Beijing, China, 2002.
- [4] Shulte R.T., *Optimal sensor placement for damage identification-an efficient forward- backward selection algorithm*, EWSHM 3, Granada, Espagne, pp. 1151-1159, 2006.
- [5] Doebling S.W., Farrar C.R., Prime M.B., Shevitz D.W., *Damage identification and health monitoring on structural and mechanical systems from changes in their vibration characteristics : a literature review*, Report LA-13070-MS, Los Alamos National Laboratory, USA, 1996.
- [6] Inman D.J., *Vibration with Control*, John Wiley & Sons Ltd, The Atrium, England, 2006.
- [7] Clough R. W., Penzien J., *Dynamics of structures*, McGraw-Hill, New York, 1993.
- [8] Udawadia F.E., *Methodology for optimum sensor locations for parameter-identification in dynamic-systems*, Journal of Engineering Mechanics-Asce, 120(2), pp. 368-390, 1994.
- [9] Pickrel C.R., *A practical approach to modal pretest design*, Mechanical Systems and Signal Processing, 13(2), pp. 271-295, 1999.
- [10] Korte B.H., Vygen J., *Combinatorial optimization : theory and algorithms*, Edition 3, Springer, Berlin, New York, 2000.
- [11] Bruant I., Coffignal G., Lene F., Verge M., *A methodology for determination of piezoelectric actuator and sensor location on beam structures*, Journal of Sound and Vibration, 243(5), pp. 862-882, 2001.
- [12] Li Z.N. Tang J., Li Q.S., *Optimal sensor locations for structural vibration measurements*, Applied Acoustics, 65(8), pp. 807-818 2004.
- [13] Papadopoulos M., Garcia E., *Sensor Placement Methodologies for Dynamic Testing*, AIAA Journal, 36(2), pp. 256-263, 1998.
- [14] Kammer D.C., *Sensor placement for on-orbit modal identification and correlation of large space structures*, Journal of Guidance Control and Dynamics, 14(2) pp. 251-259, 1991.



- 
- [15] Ewins D.J., *Modal testing : theory, practice and application*, Wiley, Edition 2, 576 p., 2000.
- [16] Friswell M.I., Mottershead J.E., *Finite element model updating in structural dynamics*, Kluwer Academic Publishers, 1995.
- [17] Bakir P.G., *Evaluation of optimal sensor placement techniques for parameter identification in building*, Mathematical and Computational Applications, 16(2), pp. 456-466, 2011.
- [18] Imamovic N., *Validation of large finite element model using test data*, Thèse, Department of Mechanical Engineering Imperial College of Science, Technology & Medicine, London, 1998.
- [19] Schedlinski C., Link M., *An approach to optimal pick-up and exciter placement*, IMAC 14, Dearborn, Michigan, USA, pp. 376-382, 1996.
- [20] Carne T.G., Dohrmann C.R., *A modal test design strategy for model correlation*, IMAC 13, USA, pp. 927-933, 1995.
- [21] Dongsheng L., *Sensor placement methods and evaluation criteria in structural health monitoring*, Thèse, Université de Siegen, Allemagne, 2011.
- [22] Li B., Li D., Zhao X., Ou J., *Optimal sensor placement in health monitoring of suspension bridge*, Science China, Technological Sciences, 55(7), pp. 2039-2047, 2012.
- [23] Zhang L., Fei Q., Li A.-Q., Miao C., *Vibration sensor placement method based on principal subset selection*, Chinese Journal Of Theoretical And Applied Mechanics, 40(4) pp. 543-549, 2008.
- [24] Sazonov E., Klinkhachorn P., *Optimal spatial sampling interval for damage detection by curvature or strain energy mode shapes*, Journal of Sound and Vibration, 285(4-5), pp. 783-801, 2004.
- [25] Cremona C., Adelaide L., *Optimization of measurement points for damage location*, IOMAC 3, pp. 719-728.
- [26] Hamming R.W., *Digital filters*, Dover Publications, INC. Mineola, New York, 1989.

## Chapitre 4

# Sensibilité des méthodes de détection d'endommagement

---

**C**<sup>E</sup> CHAPITRE présente l'application de quelques méthodes de détection d'endommagements, évoquées au chapitre 2, sur un modèle EF de poutre E-E.

Une étude de sensibilité sur l'efficacité de ces méthodes est alors effectuée vis-à-vis :

- du type du capteur.
- du bruit numérique, afin de simuler la dispersion des paramètres modaux.
- du nombre capteurs.

La fiabilité des méthodes est ensuite évaluée par la détermination de probabilités de détection à l'aide de la méthode de Monte-Carlo. Cette approche permet de prendre en compte les incertitudes qui peuvent exister lors d'une inspection et qui sont responsables de la variabilité de la réponse d'un système. Nous verrons ainsi que les probabilités de détection obtenues à partir des extensomètres longue base sont plus élevées que celles obtenues avec des capteurs ponctuels (accéléromètres par exemple).

La dernière partie du chapitre est consacrée à l'application de quelques techniques de placement optimal des capteurs pour le modèle EF de poutre.

---

**Plan du Chapitre 4**

---

<b>4.1</b>	<b>Description de l'étude . . . . .</b>	<b>61</b>
4.1.1	Modélisation de la poutre . . . . .	61
4.1.2	Modélisation du défaut . . . . .	62
<b>4.2</b>	<b>Identification modale . . . . .</b>	<b>62</b>
<b>4.3</b>	<b>Paramètres de l'étude de sensibilité . . . . .</b>	<b>64</b>
4.3.1	Type de capteur . . . . .	64
4.3.2	Dispersion des résultats . . . . .	64
4.3.3	Nombre de capteur . . . . .	64
<b>4.4</b>	<b>Méthodes utilisant les paramètres modaux . . . . .</b>	<b>65</b>
4.4.1	Evolution des fréquences propres avec le défaut . . . . .	65
4.4.2	Evolution des déformées modales avec le défaut . . . . .	66
4.4.3	MAC et COMAC . . . . .	69
4.4.4	Flexibilité . . . . .	70
<b>4.5</b>	<b>Méthodes utilisant la courbure modale . . . . .</b>	<b>71</b>
4.5.1	Courbure des déformées modales . . . . .	71
4.5.2	Courbure de flexibilité . . . . .	75
4.5.3	Energie de déformation . . . . .	77
4.5.4	Courbure de FRF . . . . .	80
<b>4.6</b>	<b>Quantification . . . . .</b>	<b>84</b>
<b>4.7</b>	<b>Méthode du filtrage modal . . . . .</b>	<b>85</b>
<b>4.8</b>	<b>Etude de fiabilité par les probabilités . . . . .</b>	<b>87</b>
4.8.1	Critère de classement . . . . .	88
4.8.2	Principe de l'étude . . . . .	89
4.8.3	Simulations avec ajout du bruit numérique sur les déformées modales . . . . .	89
<b>4.9</b>	<b>Optimisation du placement des capteurs . . . . .</b>	<b>92</b>
4.9.1	Application de la EI sur des données numériques . . . . .	95
4.9.2	Application de la fonction de type 1 . . . . .	96
4.9.3	Cas des ELB . . . . .	96
4.9.4	Comparaison Fonction objectif/EI . . . . .	97
4.9.5	Nombre optimal de capteurs selon Sazonov et al. [15] . . . . .	97
4.9.6	Placement optimal dans la détection d'endommagement . . . . .	98
<b>4.10</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>101</b>
	<b>Bibliographie . . . . .</b>	<b>102</b>

---

## 4.1 Description de l'étude

L'objectif principal de cette section est de présenter, sur une poutre encastree-encastree (E-E) similaire à celle qui sera utilisée expérimentalement, la mise en œuvre des méthodes introduites dans le chapitre 2 (indicateurs *MAC* et *COMAC*, méthodes fondées sur la courbure modale, méthode de l'énergie de déformation, etc). Des simulations numériques par éléments finis (EF) pour différents cas d'endommagement ont été réalisées afin d'évaluer la sensibilité des méthodes à plusieurs paramètres qui seront présentés dans le paragraphe 4.3.

Comme seul un nombre limité de modes propres peut être correctement identifié expérimentalement, il en sera de même pour les simulations numériques. Seuls les quatre premiers modes seront pris en compte pour l'application des différentes méthodes.

Une étude de fiabilité est ensuite entreprise par un calcul de probabilité de détection à l'aide de la méthode de Monte-Carlo. Cela permettra d'estimer la performance de chaque méthode en fonction de trois paramètres : le type du capteur, la sévérité du défaut et le niveau de bruit numérique ajouté.

Enfin, ce chapitre abordera le problème d'optimisation du placement des capteurs. Des simulations seront réalisées en utilisant deux méthodes d'optimisation du positionnement des capteurs sur le même cas de poutre. Des conclusions termineront le chapitre.

### 4.1.1 Modélisation de la poutre

Le cas d'application choisi est celui d'une poutre en aluminium bi-encastree (E-E) dont les caractéristiques sont répertoriées dans le tableau 4.1. Elles sont identiques à celles de la poutre qui sera étudiée expérimentalement dans le chapitre 7.

<b>Longueur (<math>m</math>)</b>	0.705
<b>Largeur (<math>m</math>)</b>	0.04
<b>Epaisseur (<math>m</math>)</b>	0.0081
<b>Section (<math>m^2</math>)</b>	$0.324 \cdot 10^{-3}$
<b>Inertie (<math>m^4</math>)</b>	$1.7715 \cdot 10^{-9}$
<b>Module d'Young (<math>N/m^2</math>)</b>	$61.7 \cdot 10^9$
<b>Masse volumique (<math>kg/m^3</math>)</b>	2791

TABLEAU 4.1 – Caractéristiques de la poutre E-E

La poutre est discrétisée en 100 éléments finis (Fig.4.1) et comportera ainsi 101 nœuds, chaque nœud possédant 2 ddl (déplacement vertical et rotation). Seuls les quatre premiers modes sont pris en compte et l'amortissement modal vaut 0.5%.



FIGURE 4.1 – Modèle EF de la poutre encastree-encastree

### 4.1.2 Modélisation du défaut

En général, un défaut est simulé par une réduction de la section d'un élément fini entraînant ainsi une réduction de rigidité locale, représentant par exemple une entaille qui serait appliquée symétriquement de part et d'autre de l'axe neutre.

Les simulations ont été réalisées en réduisant la section sur la largeur. L'emplacement du défaut, au niveau de l'élément 56, est choisi arbitrairement. Le défaut est donc situé entre les abscisses  $x_0 = 39.18\text{cm}$  et  $x_1 = 39.78\text{cm}$  (Fig. 4.2).

Nous présenterons les résultats numériques obtenus pour 20 cas d'endommagements.

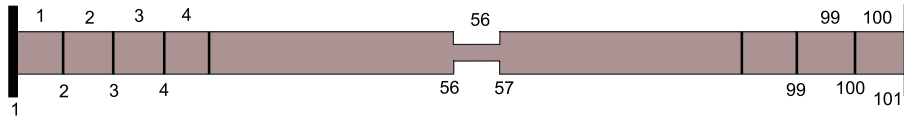


FIGURE 4.2 – Modèle EF de la poutre E-E endommagée

La diminution de la largeur de l'élément varie ainsi de 0% à 20% avec un pas de 1% (Tab. 4.2).

Cas	Profondeur entaille	Largeur	Inertie	Raideur	Variation de raideur locale
	$b_0(mm)$	$b(mm)$	$I^* \cdot 10^3 (mm^4)$	$EI^* \cdot 10^6 (GPa \cdot m^4)$	$\frac{\Delta EI(\%)}{EI}$
0	0	40.0	1.771	1.095	0
1	0.4	39.6	1.754	1.084	1
2	0.8	39.2	1.736	1.073	2
3	1.2	38.8	1.718	1.062	3
4	1.6	38.4	1.701	1.051	4
5	2.0	38.0	1.683	1.040	5
6	2.4	37.6	1.665	1.029	6
7	2.8	37.2	1.647	1.018	7
8	3.2	36.8	1.630	1.007	8
9	3.6	36.4	1.612	0.996	9
10	4.0	36.0	1.594	0.985	10
11	4.4	35.6	1.577	0.974	11
12	4.8	35.2	1.559	0.963	12
13	5.2	34.8	1.541	0.952	13
14	5.6	34.4	1.523	0.942	14
15	6.0	34.0	1.506	0.931	15
16	6.4	33.6	1.488	0.920	16
17	6.8	33.2	1.470	0.909	17
18	7.2	32.8	1.453	0.898	18
19	7.6	32.4	1.435	0.887	19
20	8.0	32.0	1.417	0.876	20

TABEAU 4.2 – Caractéristiques des vingt cas d'endommagement simulés

## 4.2 Identification modale

Les déformées modales et fréquences propres de la poutre ( $\phi_k$  et  $f_k = \sqrt{\lambda_k}/2\pi$ ) sont obtenues par la résolution de l'équation aux valeurs propres du modèle EF :

$$(K - \lambda_k M)\phi_k = 0 \quad (4.1)$$

où  $M$  est la matrice de masse et  $K$  la matrice de raideur,  $\phi_k$  le mode propre  $n^\circ k$  et  $\lambda_k$  la valeur propre correspondante. Les matrices élémentaires de l'élément endommagé,  $K_e^*$  et  $M_e^*$ , sont définies

Mode	Fréquence (Hz)		
	$f_{num}$	$f_{th}$	erreur (%)
$n^{\circ} 1$	78.82	78.83	0.012
$n^{\circ} 2$	217.29	217.28	0.004
$n^{\circ} 3$	425.97	426.01	0.009
$n^{\circ} 4$	704.17	704.16	0.001

TABLEAU 4.3 – Quatre premières fréquences numériques et théoriques de la poutre intacte

par rapport à celles de l'élément sain,  $K_e$  et  $M_e$ , par :

$$\tilde{K}_e = K_e \frac{I^*}{I} \quad \text{et} \quad \tilde{M}_e = M_e \frac{S^*}{S}$$

avec  $I$ ,  $I^*$ ,  $S$  et  $S^*$  les moments quadratiques et les sections des éléments sain et endommagé respectivement.

Les quatre premières fréquences propres obtenues numériquement pour la poutre saine sont comparées aux fréquences analytiques (Tab. 4.3). L'écart est très faible, le nombre d'éléments finis choisi pour discrétiser la poutre est donc suffisant pour assurer la convergence du modèle.

La figure 4.3 représente les quatre premières déformées modales, déformées angulaires modales et courbures modales de la poutre E-E saine.

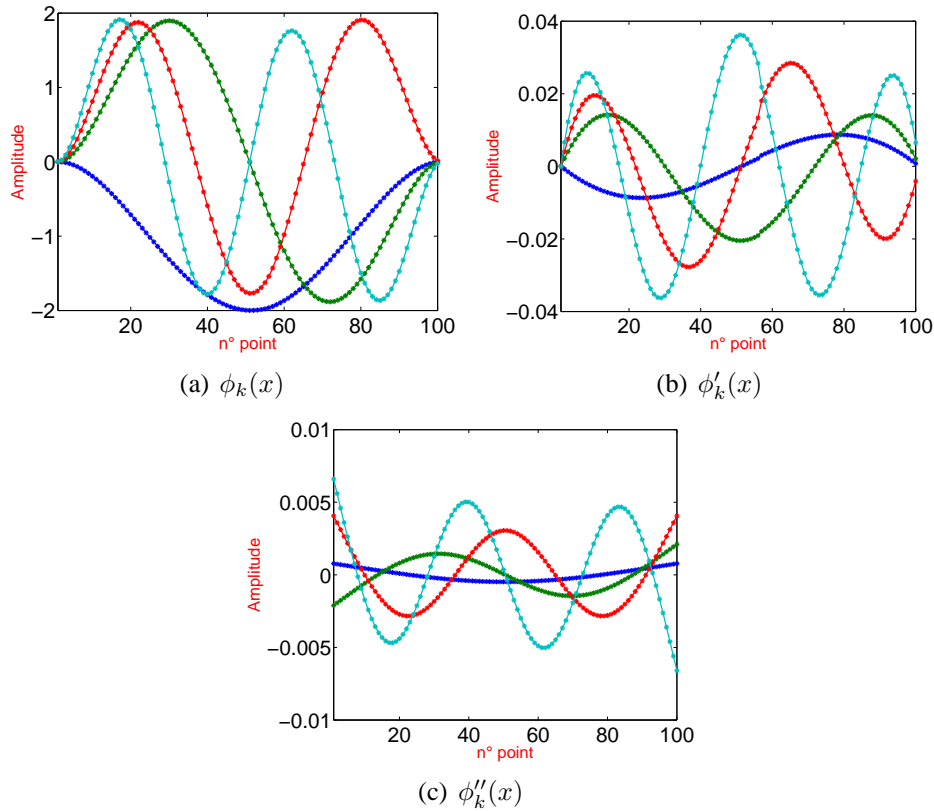


FIGURE 4.3 – Graphes des quatre premières déformées modales, déformées angulaires et courbures modales pour la poutre E-E saine.

### 4.3 Paramètres de l'étude de sensibilité

Dans notre étude, l'objectif est d'étudier l'influence de certains paramètres sur la détection et la localisation d'un endommagement, appliquées au cas d'une poutre, afin de définir si des couples méthode de détection/type de capteur sont plus efficaces pour le SHM.

#### 4.3.1 Type de capteur

La sensibilité des méthodes de détection et de localisation d'endommagement par rapport au type de capteur utilisé est développée dans cette section. Les mesures de capteurs ponctuels (accéléromètres, capteurs de vitesse ou de déplacement), d'extensomètres longue base (ELB), de capteurs de rotation et de jauges ponctuelles seront simulées afin de comparer les résultats obtenus. Ces simulations sont réalisées dans un premier temps sans ajout de bruit numérique.

#### 4.3.2 Dispersion des résultats

Le fait d'utiliser des signaux numériques pour tester les différentes méthodes de détection d'endommagement permet, généralement, d'obtenir d'excellents résultats qui ne sont pas très représentatifs de cas d'application réels.

En effet, des variations dans les paramètres modaux peuvent provenir de changements des conditions climatiques ou d'erreurs de mesures. Ce problème n'a été étudié que récemment, entre autres, par Alampalli et al. [4] en assurant la surveillance continue d'une structure sur une longue période afin de vérifier la répétabilité dans l'estimation des paramètres modaux.

Ainsi, afin d'étudier la fiabilité des méthodes présentées, des simulations numériques ont été réalisées en ajoutant du bruit numérique, de niveaux différents, sur les déformées modales. En réalité, ce sont les signaux temporels qui sont sujets au bruit de mesure, cependant la génération de signaux numériques et leur traitement afin d'estimer les paramètres modaux est coûteux en temps de calcul et pas nécessairement plus approprié que d'ajouter le bruit directement sur les paramètres modaux. De plus, lorsque des signaux de mesures sont bruités, le bruit se répercute généralement sur les paramètres modaux identifiés.

Alvandi dans sa thèse [5] a évalué la probabilité de détection pour différentes méthodes en ajoutant également un bruit numérique, pour le cas de capteurs ponctuels en fonction de la position de la source d'excitation par rapport celle de l'endommagement.

#### 4.3.3 Nombre de capteur

Le nombre de capteurs utilisés est un paramètre essentiel dans le SHM. En effet, un nombre important de points de mesure est nécessaire afin d'obtenir une bonne représentation de l'état d'un ouvrage et de faire un diagnostic. Pour cela, la sensibilité des méthodes de détection par rapport au nombre de capteurs est étudiée. Dans cette étude, trois cas sont pris en compte dans les simulations numériques :

10, 20 et 50 points de "<mesure>", régulièrement espacés le long de la poutre. Quelques méthodes de détection d'endommagement seront appliquées pour chaque cas.

### 4.4 Méthodes utilisant les paramètres modaux

Nous allons commencer par appliquer quelques méthodes qui utilisent directement les paramètres modaux identifiés.

#### 4.4.1 Evolution des fréquences propres avec le défaut

Afin d'étudier la variation des fréquences propres en présence d'endommagement, nous appliquerons la formule (4.2) proposée par [1][2] afin de calculer les variations relatives des fréquences propres  $\Delta f_k$  par rapport à l'état sain. Le tableau 4.4 présente les fréquences propres et les variations relatives correspondantes pour quelques niveaux d'endommagement.

$$\Delta f_k(\%) = \left| \frac{f_k - f_k^*}{f_k} \right| \times 100 \quad (4.2)$$

Cas	Fréquences (Hz)			
	1 <sup>ère</sup>	2 <sup>ème</sup>	3 <sup>ème</sup>	4 <sup>ème</sup>
<b>Poutre intacte</b>	78.83	217.29	425.98	704.17
<b>Cas 1 (1%)</b>	78.82	217.29	425.92	704.16
Changement (%)	0.009	0.003	0.014	0.010
<b>Cas 5 (5%)</b>	78.79	217.27	425.59	703.88
Changement (%)	0.052	0.018	0.080	0.057
<b>Cas 10 (10%)</b>	78.72	217.23	424.08	703.51
Changement (%)	0.239	0.074	0.321	0.226
<b>Cas 20 (20%)</b>	78.51	217.12	423.56	702.40
Changement (%)	0.390	0.116	0.498	0.349

**TABEAU 4.4 – Fréquences propres et variations relatives correspondantes pour quelques niveaux d'endommagement**

Il apparaît clairement que plus l'endommagement est sévère, plus les variations relatives des fréquences sont importantes. Cependant, ces variations restent très faibles et ne peuvent donc pas automatiquement être utilisée pour prouver l'existence d'un endommagement.

*D'un point de vue expérimental, ces variations relatives de fréquences propres ont de fortes chances d'être complètement noyées dans la dispersion obtenues pour une série de mesures, et ne seront donc pas représentatives d'un endommagement.*



#### 4.4.2 Evolution des déformées modales avec le défaut

Une première configuration, où la poutre est couverte de capteurs ponctuels ou de jauges ponctuelles, est peu réaliste. Cette configuration suppose en effet que chacun des 101 nœuds composant le maillage correspond à un point de mesure.

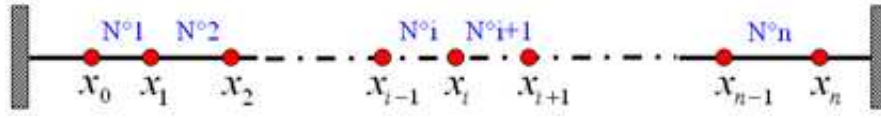


FIGURE 4.4 – Placement d'ELB en continu sur la poutre E-E.

Pour les ELB, cela équivaldrait à les mettre bout à bout entre deux points de mesure, soit 99 capteurs possédant une borne d'intégration commune avec les capteurs adjacents (Fig. 4.4). La base de mesure serait alors de  $7.12 \text{ mm}$ , ce qui est très petit et plus vraiment "<longue base>".

Une deuxième configuration avec seulement vingt capteurs régulièrement espacés le long de la poutre est plus réaliste. Les abscisses de ces points de mesure ne faisant pas forcément partie des nœuds déjà existants, les valeurs des déformées modales en ces points ont été obtenues par interpolation par splines. La distance entre 2 capteurs ponctuels sera dans ce cas égale à  $3.3 \text{ cm}$  et la base de mesure des ELB sera alors de  $3.5 \text{ cm}$ . C'est cette configuration qui sera étudiée dans la suite.

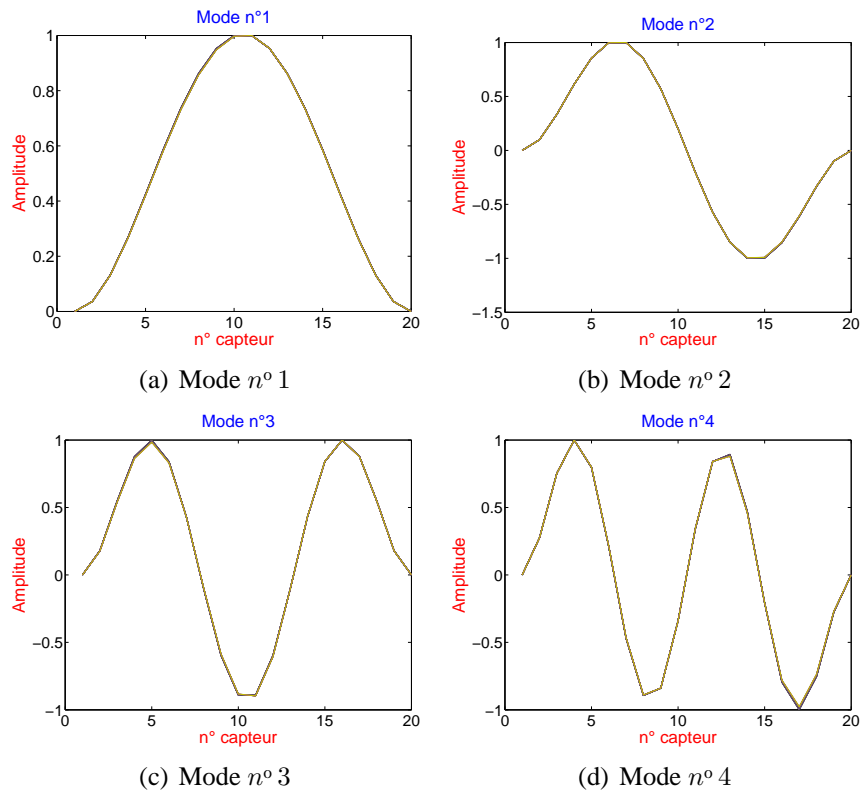
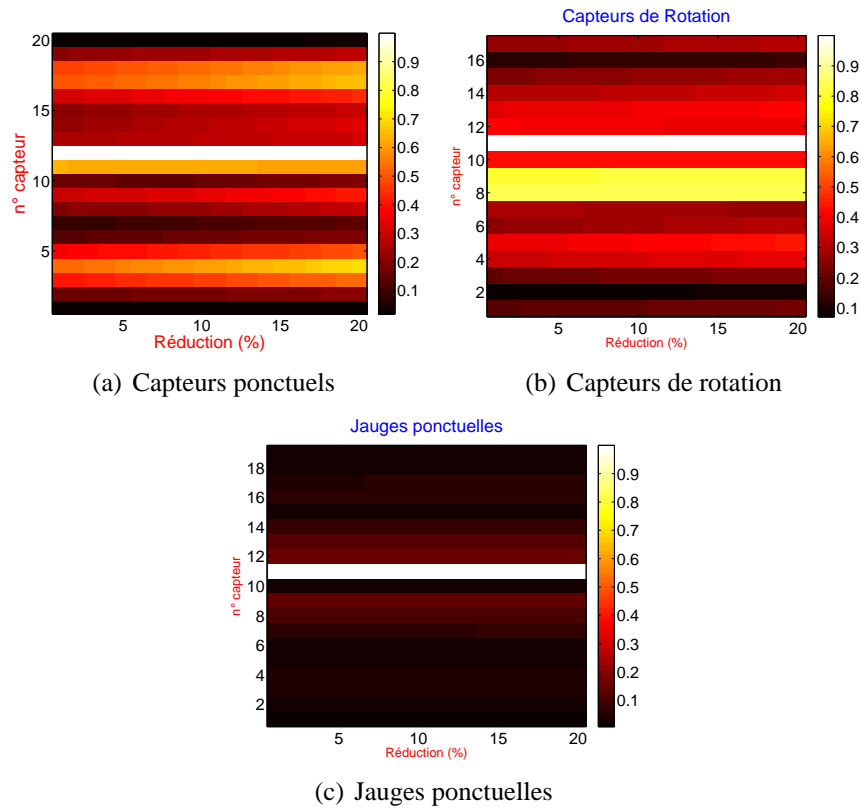


FIGURE 4.5 – Quatre premières déformées modales obtenues par des capteurs ponctuels pour les différents cas d'endommagement

Les quatre premières déformées modales normalisées obtenues par des capteurs ponctuels sont estimées pour les différents cas de défauts sur la figure 4.5. Elles sont quasiment confondues pour tous les cas d'endommagement.

Expérimentalement, cette différence minimale peut provenir des conditions aux limites, des propriétés du matériau ou bien du bruit existant.

Pour mieux visualiser cette différence, la différence absolue  $\Delta^{DM}$ , définie dans l'équation (4.3) entre les deux vecteurs modaux (sain et endommagé), est tracée pour chacun des cas et pour chaque capteur. La commande « pcolor » de Matlab est utilisée pour les représentations graphiques des résultats issus des différentes méthodes de détection d'endommagement. Les valeurs obtenues à partir des différentes méthodes sont normées par rapport au maximum pour chacun des points de l'axe des abscisses (cas de défaut ou niveau de bruit). Ceci permettra d'observer clairement la valeur maximale pour chacun des indicateurs. Si nous traçons les indicateurs sans normalisation nous obtenons le graphe que montre la figure 4.9(b). Cette représentation des résultats sera conservée dans la suite du manuscrit, hormis pour l'étude de la quantification du défaut.



**FIGURE 4.6 – Variations relatives des déformées modales obtenues pour les 20 cas de défaut avec trois types de capteurs (de déplacement, de rotation et de déformation) (Seuls les 4 premiers modes sont pris en compte)**

$$\Delta^{DM}(i) = \sum_{k=1}^{N=4} |\phi_{ik} - \phi_{ik}^*| \quad (4.3)$$

où  $N$  est le nombre de modes,  $\phi_{ik}$  et  $\phi_{ik}^*$  sont les déformées modales de la structure saine et endommagée du mode  $k$  en un point  $i$ .

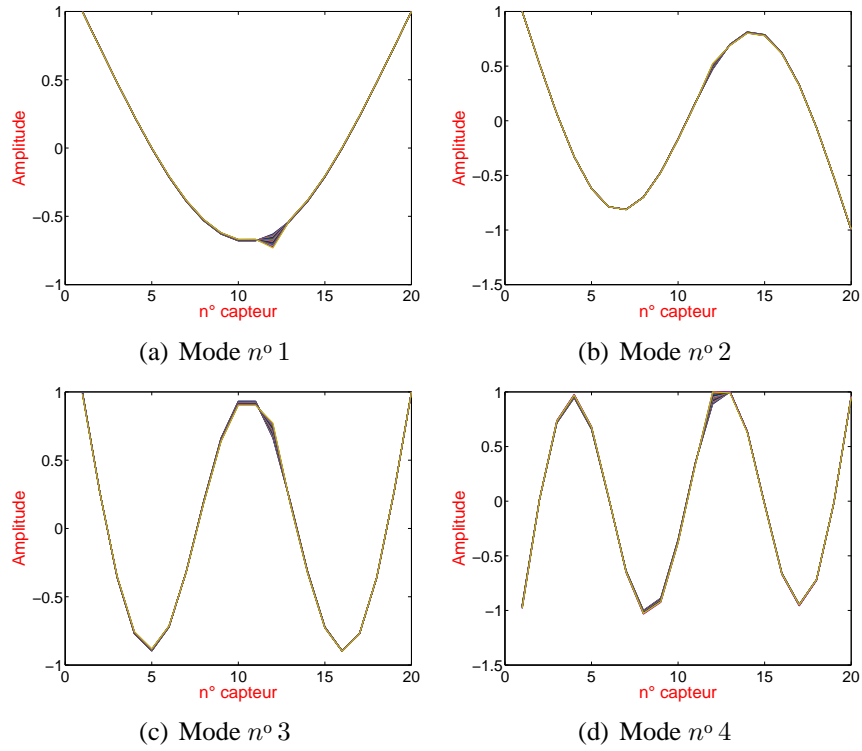
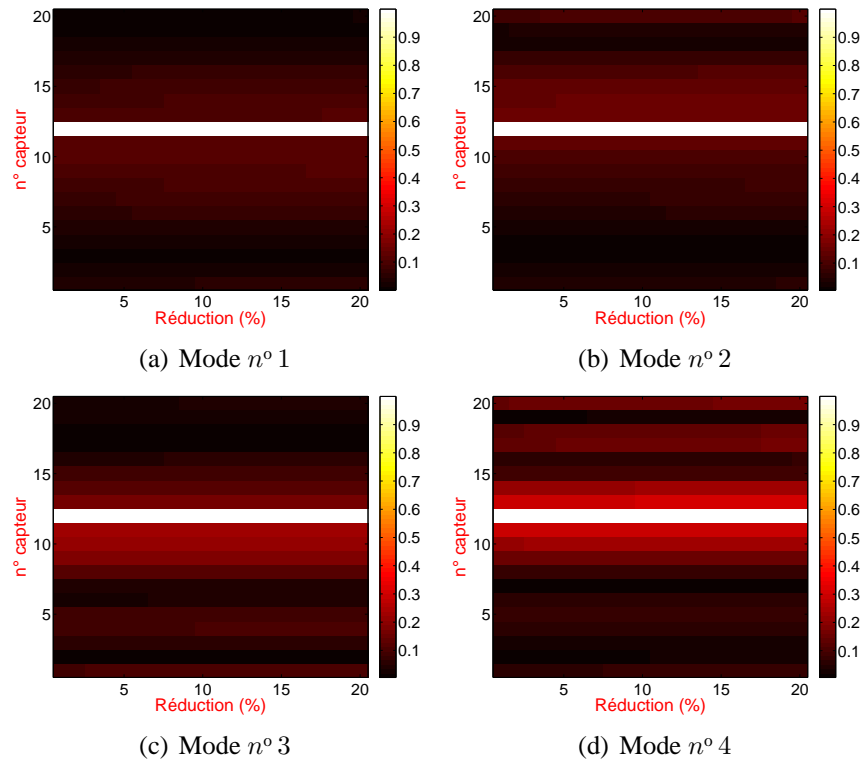
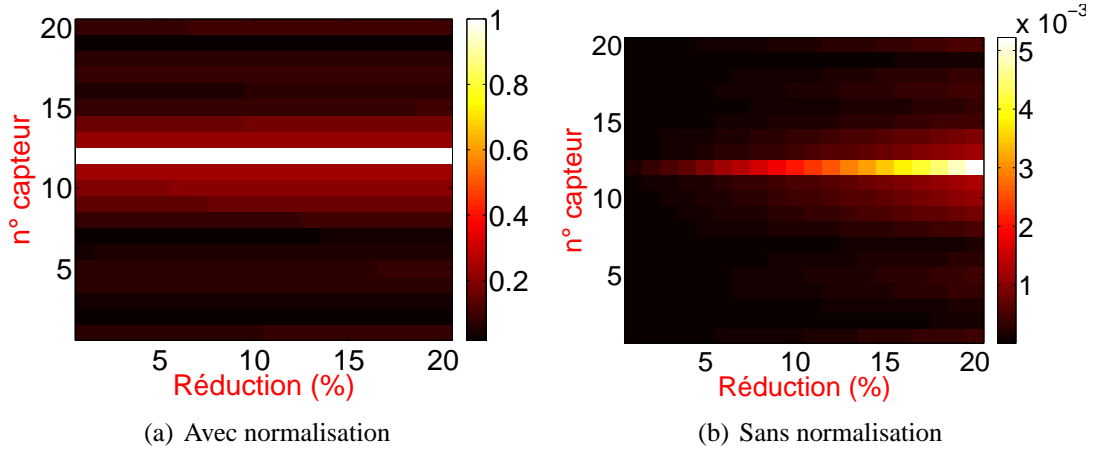

 FIGURE 4.7 – Quatre premières déformées modales  $\Psi_k$  obtenues à partir des ELB pour 20 cas de défaut


FIGURE 4.8 – Différences absolues des déformées modales obtenues à partir des ELB pour les 4 premiers modes et les différents cas de défaut

Le graphe de la figure 4.6 permet de détecter la présence d'un défaut pour les trois types de capteurs simulés (capteurs ponctuels classiques, capteurs de rotation et jauges ponctuelles). Cependant, à par-



**FIGURE 4.9 – Variations relatives des déformées modales obtenues à partir de 20 ELB pour les 20 cas de défaut (Seuls les 4 premiers modes sont pris en compte)**

tir des capteurs ponctuels et des capteurs de rotation, la localisation est peu précise au contraire des jauges ponctuelles. Puisqu’elles permettent de remonter directement aux courbures modales [6], les jauges ponctuelles permettent de bien localiser les modifications de masse et de raideur.

Pour les ELB, afin d’obtenir les déformées modales  $\Psi_k$  de manière suffisamment précise, la discrétisation des points a été augmentée au voisinage des abscisses  $a$  et  $b$ , permettant ainsi d’améliorer la précision du calcul numérique des dérivées premières des déformées modales. La figure 4.7 montre les déformées modales normalisées par rapport au maximum obtenues à partir des ELB, qui sont donc des intégrales de courbures modales.

La figure 4.8 montre la différence absolue des déformées modales des ELB pour les 4 modes propres étudiés et les différents cas de défaut. Il apparaît clairement une valeur maximale (couleur blanche sur le graphique) au niveau de l’élément endommagé pour toutes les tailles de défauts. Contrairement au cas des capteurs ponctuels, la localisation du défaut à partir des ELB est précise, comme pour les jauges ponctuelles.

#### 4.4.3 MAC et COMAC

Pour confirmer les résultats précédents, les coefficients MAC et COMAC des déformées modales obtenues par les capteurs ponctuels et les ELB sont présentés sur la figure 4.10. Les graphes représentent les valeurs de la diagonale des matrices de MAC. Les variations pour le MAC et le COMAC étant très faibles pour les deux types de capteurs, ces méthodes ne sont pas efficaces pour détecter un endommagement.

En effet, expérimentalement il serait complexe de déterminer si les faibles variations des déformées modales sont liées à l’endommagement, à l’incertitude de la répétabilité des essais, à la dispersion des résultats ou à la méthode d’identification. Ceci nous permet de conclure que l’utilisation directe

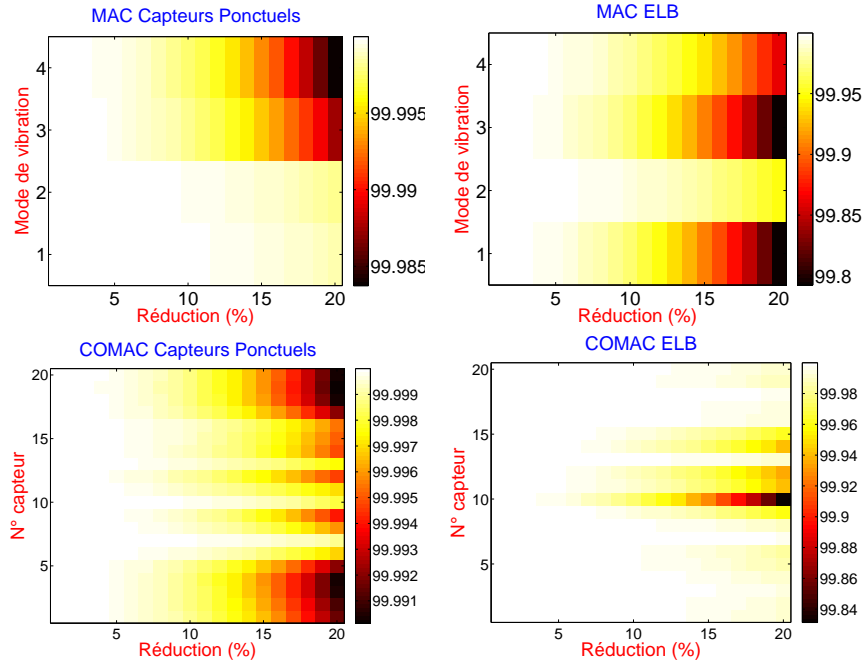


FIGURE 4.10 – Coefficients MAC et COMAC(en %) pour deux types de capteurs (capteurs ponctuels et ELB)

des paramètres modaux présente de sérieuses limites pour la détection et la localisation d'endommagement, même pour des niveaux d'endommagement élevés et que, même pour des méthodes qui seraient plus performantes et sensibles, l'influence des effets environnementaux reste à quantifier et à apprécier.

#### 4.4.4 Flexibilité

La flexibilité est définie à partir de l'équation (4.4) qui sera utilisée pour calculer le changement de flexibilité entre l'état sain et un état endommagé.

$$F = \Phi \Omega \Phi^T = \sum_{k=1}^{N=4} \frac{1}{\omega_k^2} \phi_k \phi_k^T \quad (4.4)$$

où  $\phi_k$  est la  $k^{\text{ème}}$  déformée modale obtenue par le capteur en question : la déformée modale dans le cas de capteurs ponctuels et l'intégrale de la courbure modale dans le cas des ELB.

Nous avons appliqué cette méthode pour évaluer sa sensibilité à la détection, la localisation et la quantification du défaut. La figure 4.11 montre les résultats obtenus à partir des différents capteurs. La méthode de flexibilité ne fournit pas de résultats probants pour le cas des capteurs ponctuels ainsi que pour les capteurs de rotation. Elle ne distingue pas l'élément endommagé mais indique une zone étendue aux alentours de l'élément endommagé : de fausses détections apparaissent. Pour les jauges ponctuelles, la flexibilité permet de détecter le défaut mais la localisation n'est pas très précise au contraire des ELB. Ceci nous permet de valider la conclusion déjà relevée par plusieurs chercheurs que les courbures modales sont plus sensibles aux endommagements que les déformées modales.

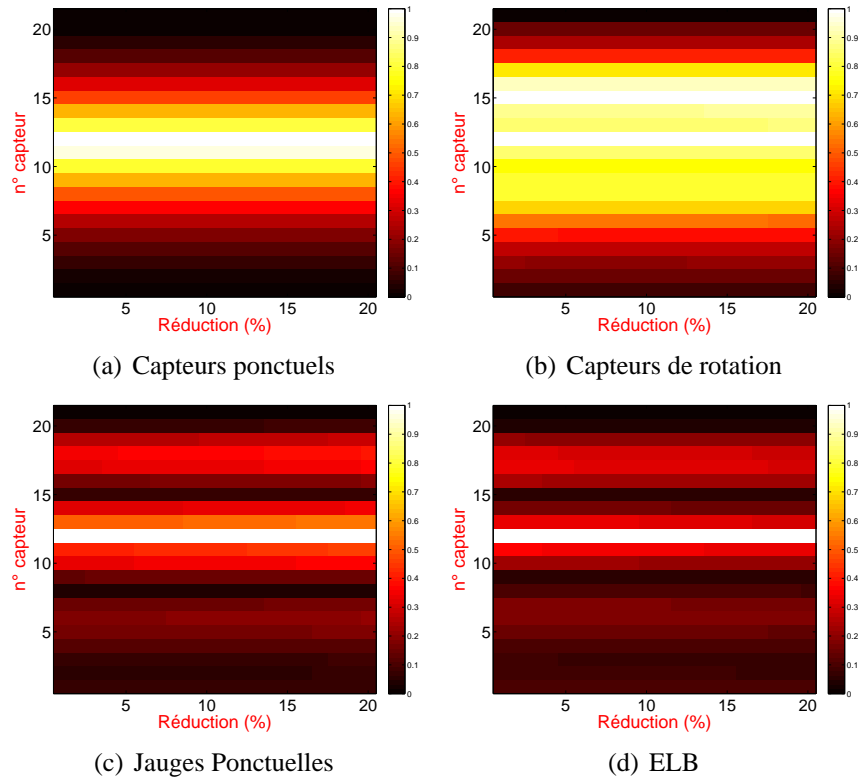


FIGURE 4.11 – Changement de flexibilité pour les quatre types de capteurs et les différents cas de défauts

## 4.5 Méthodes utilisant la courbure modale

### 4.5.1 Courbure des déformées modales

Le calcul de la courbure modale pour les capteurs ponctuels est réalisé à partir des déformées modales  $\phi_k(x_i)$  ( $x_i$  représentant l'abscisse du  $i^{\text{ème}}$  nœud ou capteur), et en appliquant directement l'équation (2.11) sans filtrage polynomial préalable. Du fait du schéma de dérivation numérique, deux points sont perdus aux extrémités. Cependant, cela n'est pas gênant puisque la poutre est encastree-encastree, les capteurs aux extrémités sont donc inutiles. Les quatre premières courbures modales obtenues pour les différents cas d'endommagement sont tracées sur la figure 4.12.

La courbure modale comporte une discontinuité au niveau du défaut. Afin de mieux visualiser les variations, la figure 4.13 représente les résultats obtenus pour la différence absolue entre les courbures modales de la poutre saine et endommagée pour chacun des 4 premiers modes.

Pour les courbures modales des deux premiers modes, le maximum se situe au niveau de la position réelle du défaut alors que pour les modes plus élevés, des valeurs importantes sont également obtenues pour les éléments adjacents au défaut. En pratique, puisque le nombre de capteurs est limité, le premier mode fournit le résultat le plus fiable ce qui était également démontré par [3].

Pour présenter les résultats à l'aide d'un indicateur unique, la figure 4.14 illustre la différence de courbure modale provenant de tous les modes étudiés en appliquant l'équation (4.5) :

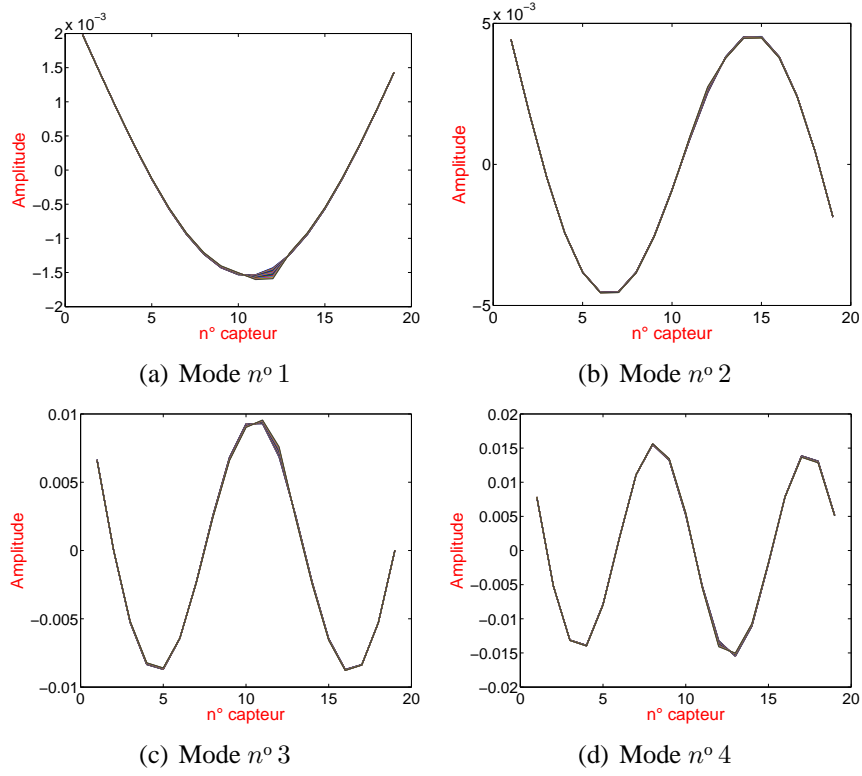


FIGURE 4.12 – Quatre premières courbures modales obtenues par les capteurs ponctuels pour les différents cas d'endommagement

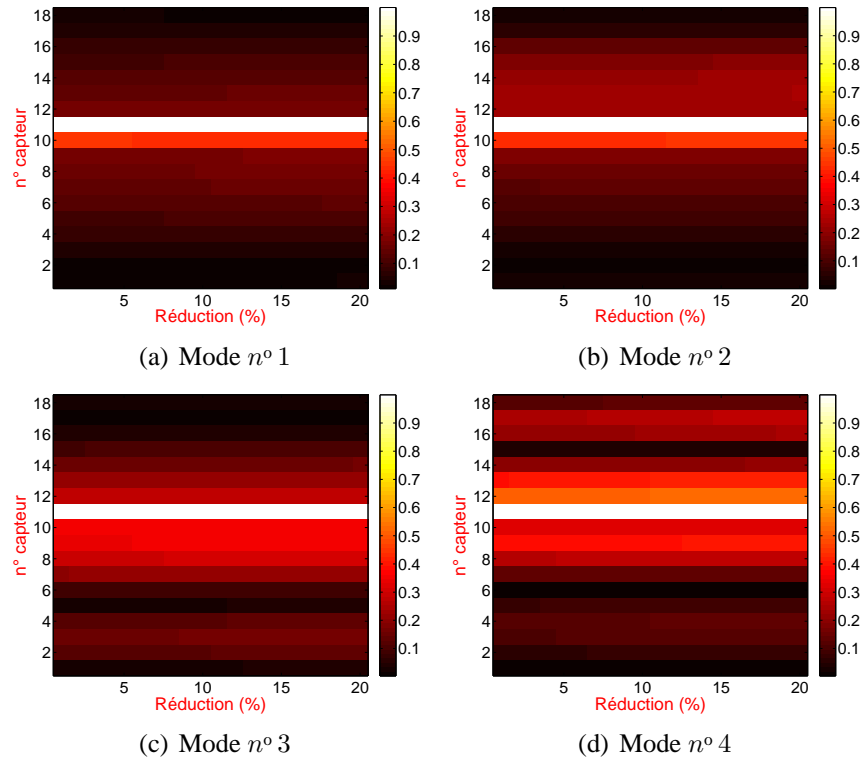


FIGURE 4.13 – Différence absolue des courbure modales pour les 4 premiers modes et les différents cas de défaut

$$\Delta^{CM}(i) = \sum_{k=1}^{N=4} |\phi''_{ik} - \phi''_{ik*}| \quad (4.5)$$

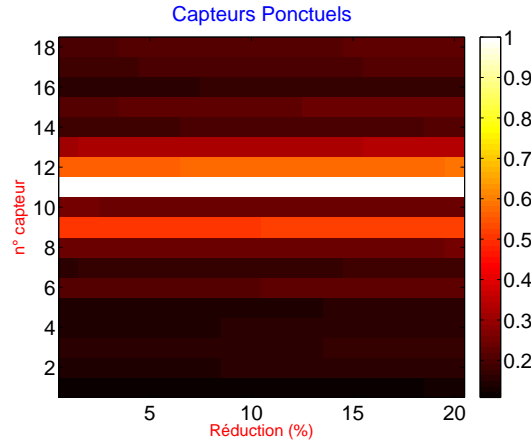


FIGURE 4.14 – Différence absolue de courbure modale obtenue pour 20 cas de défaut avec 20 capteurs ponctuels (Seuls les 4 premiers modes sont pris en compte)

On constate de fausses détections de part et d'autre de la position de l'endommagement.

*En résumé, les déformées modales ne permettent pas de détecter l'endommagement d'un point de vue expérimental, les variations étant trop faibles pour le cas de défaut modélisé. Par ailleurs, pour la courbure modale déterminée à partir des capteurs ponctuels, les résultats montrent que les méthodes de dérivation numérique amplifient la dispersion présente au niveau des déformées modales. Il est donc préférable d'utiliser un type de capteur permettant d'obtenir directement l'information désirée plutôt que d'utiliser un autre type de capteur qui nécessitera des calculs numériques supplémentaires, sources d'erreurs, pour parvenir à la même information [10].*

Pour illustrer l'effet de la dispersion des paramètres modaux qui serait obtenue expérimentalement, un bruit numérique est ajouté. Ce dernier est modélisé par une variable aléatoire, avec une moyenne et un écart-type donnés, et est ajouté aux déformées modales de la poutre obtenues par les différents capteurs.

Le  $k^{\text{ème}}$  mode propre au point  $i$ , ( $i = 1, 2, \dots, 100$ ) s'écrit alors :

$$\phi_{ik} = \phi_{ik}(1 + \varepsilon(i)) \quad (4.6)$$

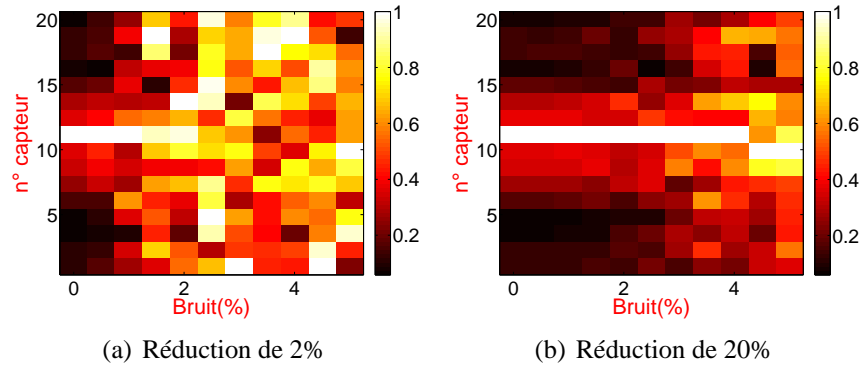
avec  $\varepsilon = N(0, \sigma_k)$

où  $\sigma_k = \sigma_p \times \max(\text{abs}(\phi_k))$  et  $\sigma_p$  la variance du bruit.

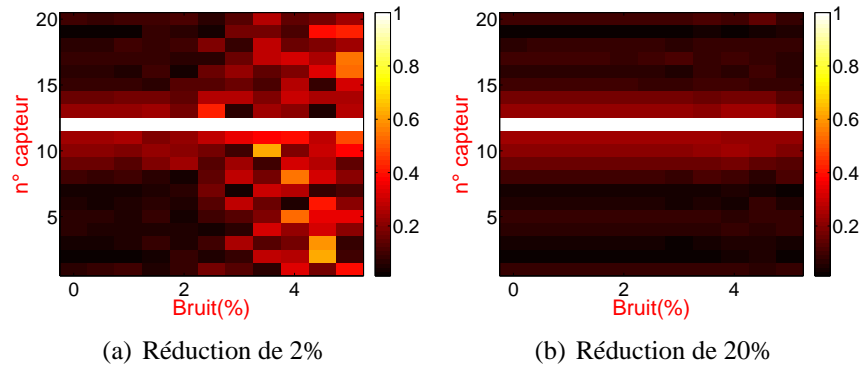
La variance du bruit est variable, de 1% et 5% avec un pas de 0.5%. Par abus de langage, lorsque nous parlerons de % de bruit ajouté dans la suite du chapitre, cela fera référence au % de la variance. Dans le cas des capteurs ponctuels, le bruit sera ajouté sur les déformées modales  $\phi_k$  alors que pour les ELB il sera ajouté sur les intégrales des courbures modales  $\int_a^b \phi_k''(x)dx$ .



La figure 4.15 présente les changements de la courbure des déformées modales obtenus à partir des capteurs ponctuels pour 2% et 10% de réduction de section de l'élément fini. La méthode donne de mauvais résultats lorsque le niveau de bruit augmente. En pratique, les dispersions seront obtenues avec la détermination des déformées modales expérimentales.



**FIGURE 4.15 – Changement de courbure modale obtenu à partir des capteurs ponctuels pour 2% et 20% d'endommagement et différents niveaux de bruit**



**FIGURE 4.16 – Changement des déformées modales à partir des ELB pour 2% et 20% d'endommagement et différents niveaux de bruit**

Contrairement à ce que nous avons observé pour les capteurs ponctuels, la variation des déformées modales obtenues par des ELB (figure 4.16) permet de détecter et localiser l'endommagement en présence de bruit. Ceci implique que lorsque les mesures sont bruitées, les ELB sont tout de même capables de détecter les défauts et de les localiser.

Concernant la sensibilité de ces méthodes par rapport au nombre de capteurs, la figure 4.17 montre qu'en présence d'un niveau de bruit important, le nombre de capteurs ponctuels ne constitue plus un paramètre favorisant la localisation du défaut. En effet, les résultats obtenus sont très dispersés et difficiles à apprécier du fait des erreurs provenant de la dérivation numérique. Pour les ELB au contraire, plus le nombre capteurs est élevé plus les résultats sont satisfaisants (Fig. 4.18).

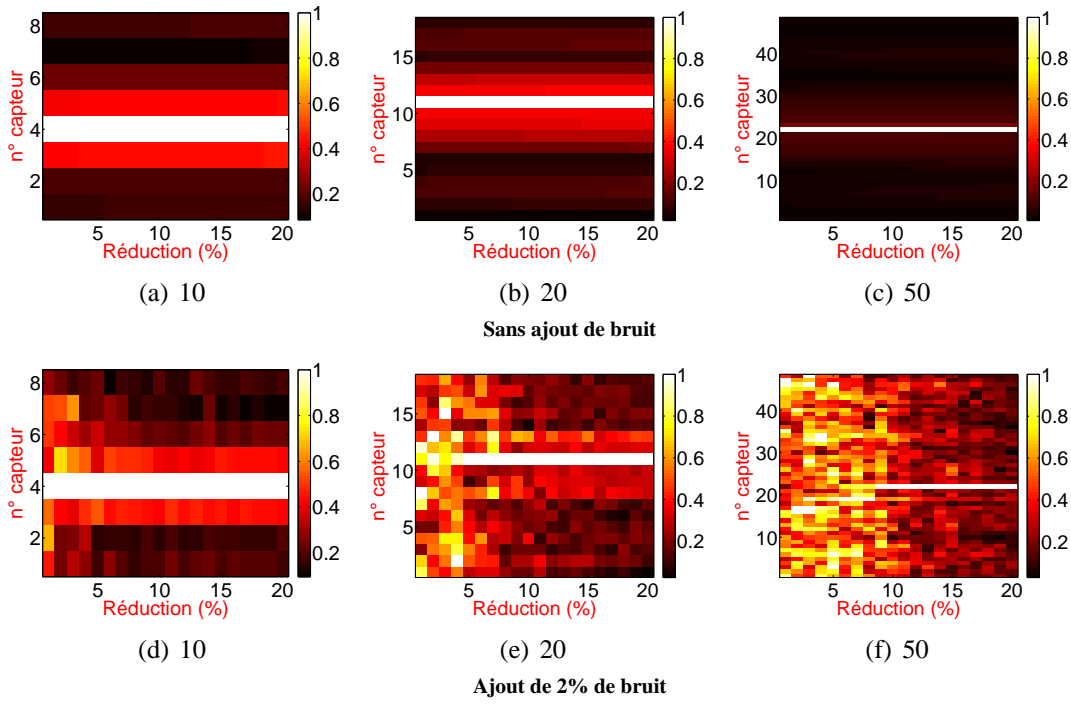


FIGURE 4.17 – Variation des courbures modales en fonction du nombre de capteurs ponctuels avec et sans ajout de bruit

## 4.5.2 Courbure de flexibilité

L'expression de la courbure de flexibilité est donnée par :

$$F_i'' = \frac{F_{i-1,i-1} - 2F_{i,i} + F_{i+1,i+1}}{h^2} \quad (4.7)$$

Nous avons calculé le changement de courbure de flexibilité entre état sain et les états endommagés avec les 4 premiers modes. Cette méthode fournit des résultats assez semblables à ceux obtenus avec la méthode des courbures modales pour les capteurs ponctuels (Fig. 4.19).

La méthode permet de détecter le défaut mais concernant la localisation, des fausses détections sur les éléments voisins du défaut sont présentes pour tous les capteurs. Ceci s'explique par le fait que la méthode de courbure de flexibilité s'appuie elle aussi sur une double dérivation numérique.

Les résultats obtenus avec cette méthodes lorsque du bruit est ajouté sur les déformées modales, comme défini dans la section 4.5, sont illustrés sur les figures 4.20 et 4.21, respectivement pour les capteurs ponctuels et les ELB. Pour un faible niveau d'endommagement, les capteurs ponctuels fournissent des résultats très mauvais dès qu'il y a du bruit alors que les ELB permettent une localisation correcte jusqu'à environ 2% de bruit ajouté. Pour un endommagement plus sévère, les capteurs ponctuels permettent de localiser presque jusqu'à 2% de bruit alors que les ELB localise le défaut pour tous les niveaux de bruit.

La figure 4.22 illustre les résultats obtenus à partir de 10, 20 et 50 capteurs ponctuels et ELB. Même pour un nombre de capteurs plus élevé, les résultats obtenus pour les capteurs ponctuels avec la méthode de la courbure de flexibilité sont très dispersés et ne permettent pas de localiser le défaut.

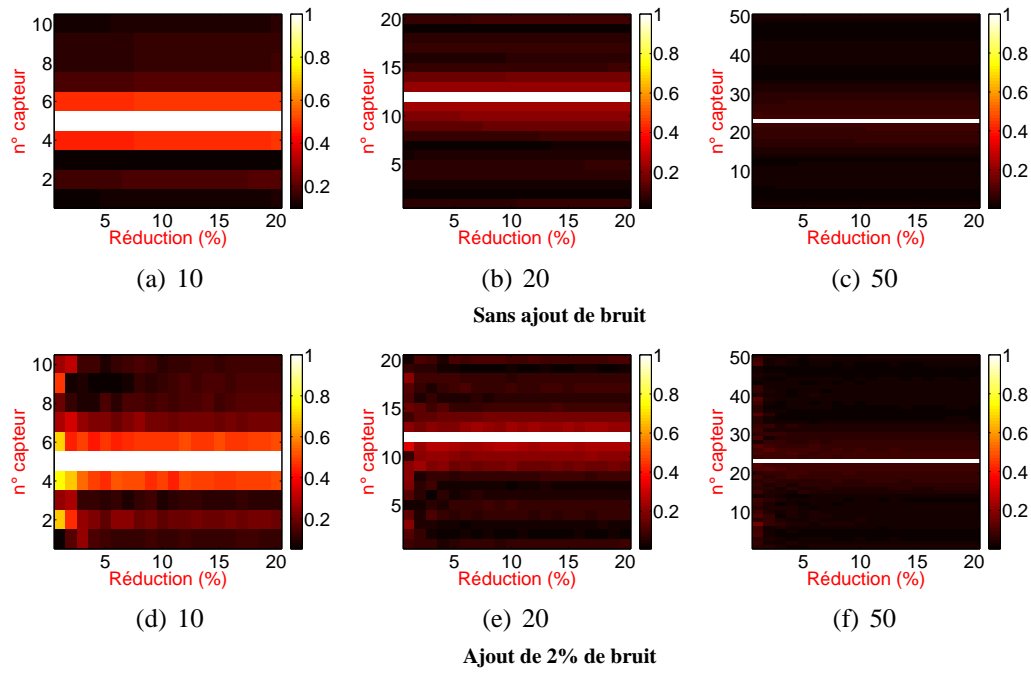


FIGURE 4.18 – Variation des vecteurs propres en fonction du nombre d'ELB

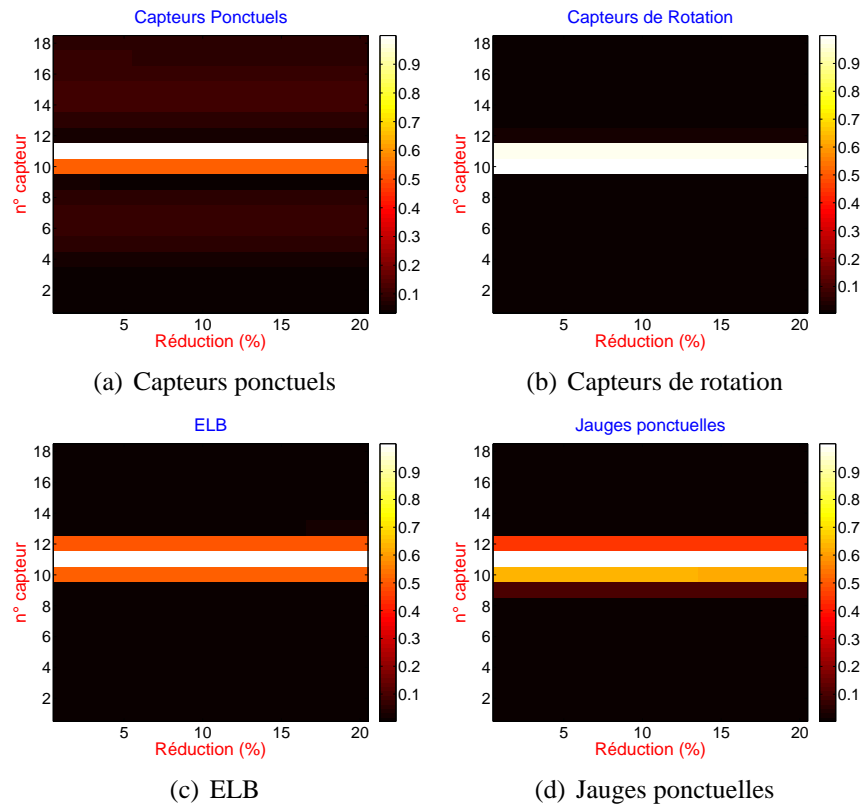


FIGURE 4.19 – Changement de courbure de flexibilité pour les différents cas de défaut et les quatre types de capteurs

Contrairement aux capteurs ponctuels, les résultats obtenus à partir des ELB (Fig. 4.23) montrent que la localisation s'améliore lorsque le nombre de capteurs augmente.

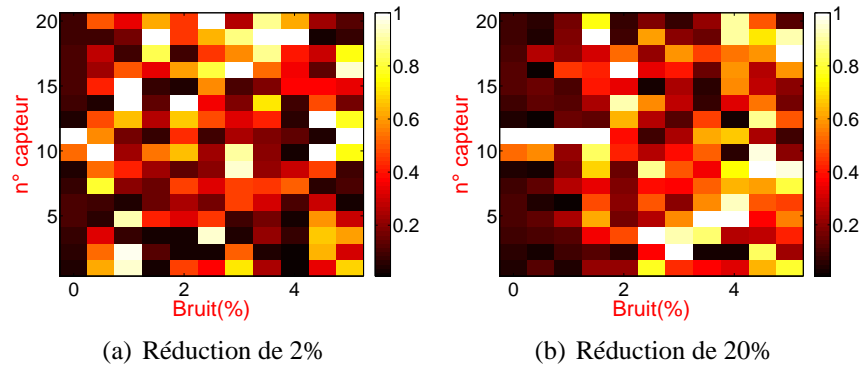


FIGURE 4.20 – Changement de courbure de flexibilité à partir des capteurs ponctuels pour des endommagements de 2% et 20%, et différents niveaux de bruit

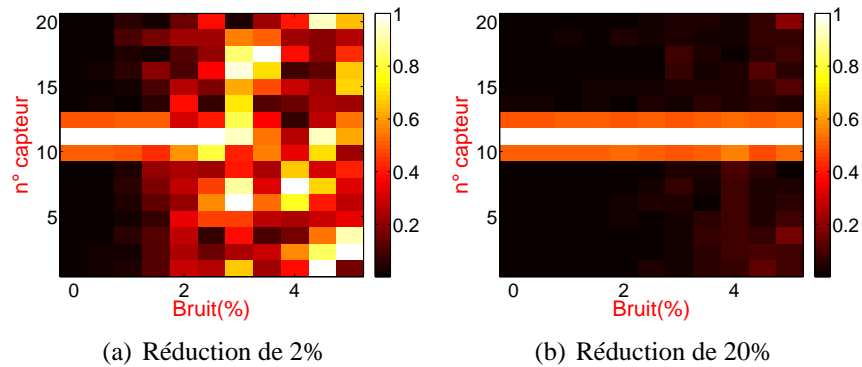


FIGURE 4.21 – Changement de courbure de flexibilité à partir des ELB pour des endommagements de 2% et 20%, et différents niveaux de bruit

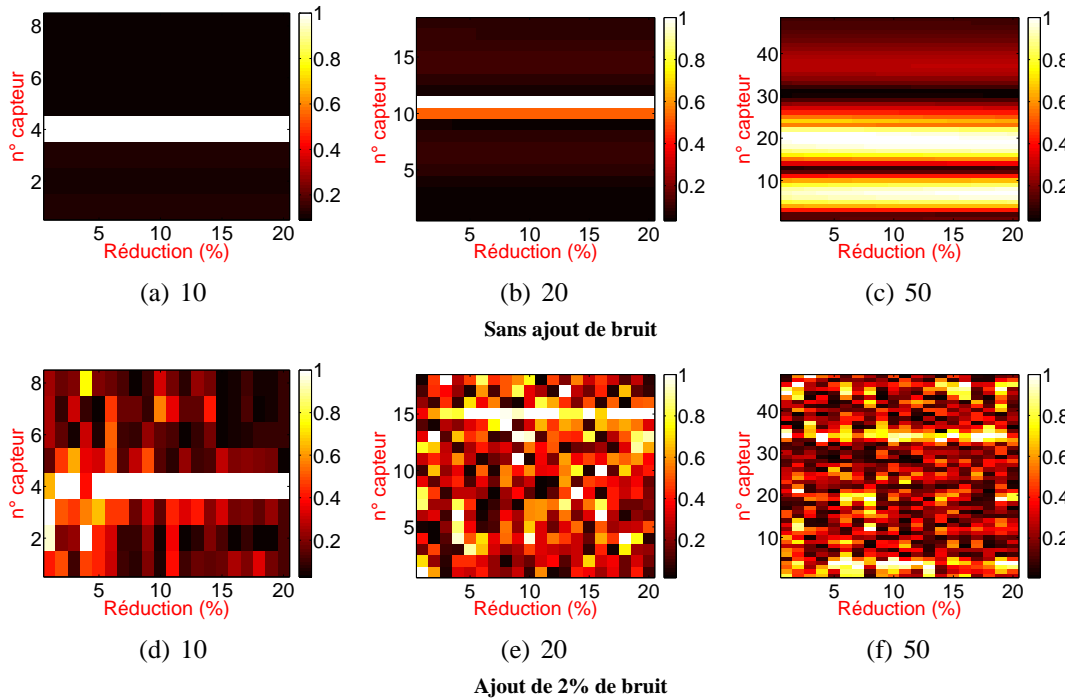


FIGURE 4.22 – Variation des courbures de flexibilité en fonction du nombre de capteurs ponctuels

### 4.5.3 Energie de déformation

L'équation 4.8 donne l'indice d'endommagement  $\beta_i$ , fondé sur le changement de l'énergie de déformation modale, obtenu pour la somme des quatre premiers modes de vibration étudiés.

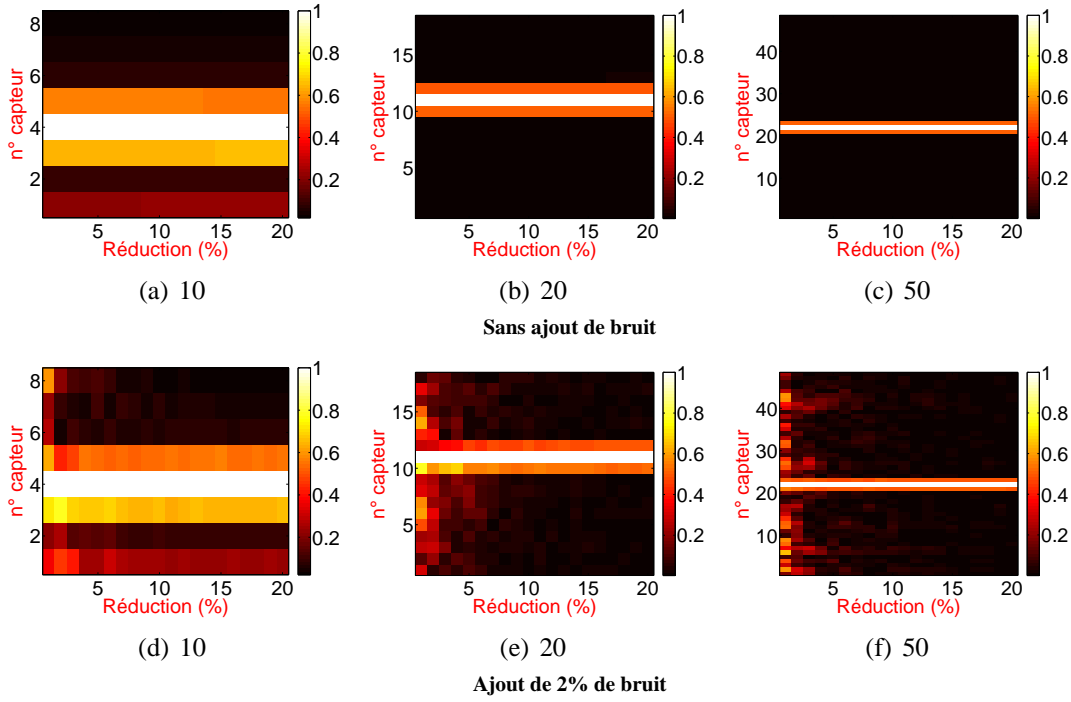


FIGURE 4.23 – Variation des courbures de flexibilité en fonction du nombre d'ELB

$$\beta_i = \sum_{k=1}^{N=4} \frac{\left[ \int_{L_i}^{L_{i+1}} \left( \frac{\partial^2 \phi_k(x_i)}{\partial x^2} \right)^2 dx \right]^*}{\left[ \int_0^L \left( \frac{\partial^2 \phi_k(x)}{\partial x^2} \right)^2 dx \right]^*} \times \sum_{k=1}^{N=4} \frac{\left[ \int_0^L \left( \frac{\partial^2 \phi_k(x)}{\partial x^2} \right)^2 dx \right]}{\left[ \int_{L_i}^{L_{i+1}} \left( \frac{\partial^2 \phi_k(x_i)}{\partial x^2} \right)^2 dx \right]} \quad (4.8)$$

où  $\phi_k$  est la déformée modale  $n^\circ k$  obtenue par des capteurs ponctuels.

Pour le cas des ELB, nous avons fait le choix de remplacer  $\phi_k$  par  $\Psi_k$ , l'intégrale de la courbure modale obtenue avec les ELB. Le fait de remplacer directement  $\phi_k$  par  $\Psi_k$  dans la formule fait cependant perdre quelque peu le sens physique de la méthode qui est lié à la courbure modale. Il sera fait de même pour les capteurs de rotation ( $\phi_k$  par  $\phi'_k$ ) et les jauges ponctuelles ( $\phi_k$  par  $\phi''_k$ )

La méthode permet de localiser le défaut pour les différents types de capteurs (Fig. 4.24). Seules les valeurs positives sont représentatives d'un endommagement. Il convient à ce stade d'attirer l'attention sur le fait que cet indicateur ne doit pas être analysé sur la simple base de maxima locaux pour permettre la détection d'un endommagement, à la différence des méthodes de flexibilité et de courbures de flexibilité par exemple [5]. La détection du défaut n'est donc pas absolue mais repose sur le choix d'un seuil de détection  $z_s$ . S'il est choisi trop faible, les fausses détections seront nombreuses. La non détection d'endommagements effectivement présents est également possible [5].

Par conséquent, contrairement aux indicateurs de courbure des déformées modales, de flexibilité et de courbure de flexibilité qui sont des fonctions croissantes avec l'endommagement, l'indicateur d'en-

dommagement  $\beta$  ne permettra pas de quantifier la sévérité de l'endommagement.

Dans le cas d'un seuil  $z_s$  fixé à 2, la figure 4.24 montre qu'à partir des capteurs ponctuels, des capteurs de rotation et des jauges ponctuelles, les éléments voisins de l'élément endommagé sont considérés comme endommagés pour tous les niveaux. Par contre, les résultats de détection et de localisation obtenus à partir des ELB sont plus précis.

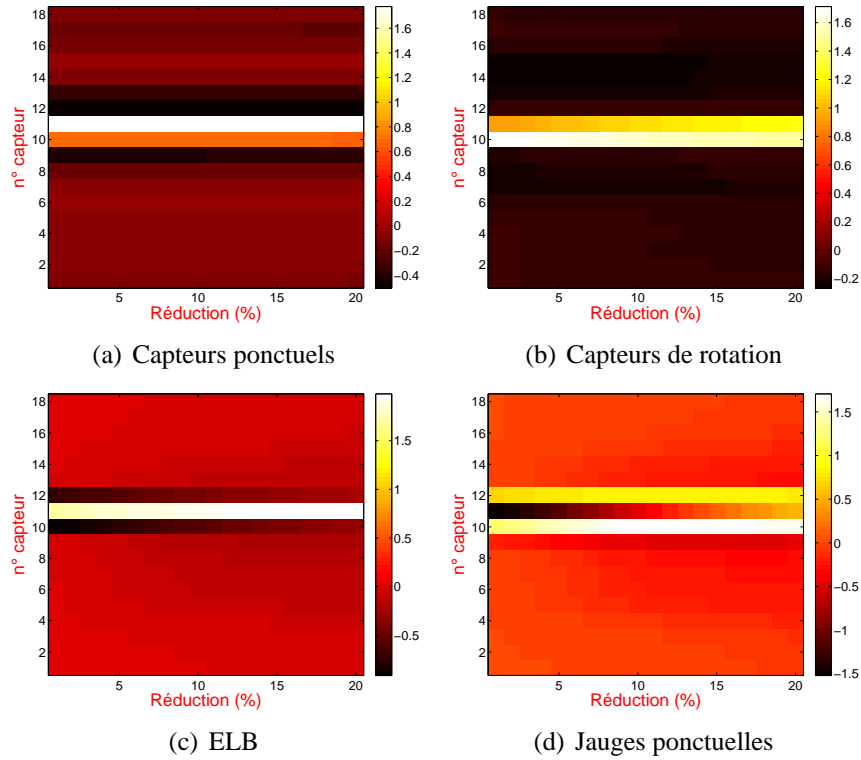


FIGURE 4.24 – Changement de l'énergie de déformation à partir des quatre types de capteurs pour les différents cas de défauts ( $z_s = 2$ )

Cette méthode de détection a une propension à localiser l'endommagement dans une zone relativement restreinte autour de l'endommagement réel. Ceci a pour conséquence d'indiquer que, lorsqu'un endommagement est détecté, il faudra ausculter plus précisément les mailles de capteurs voisines de la maille détectée [5].

En ajoutant du bruit au niveau des déformées modales pour les capteurs ponctuels, la figure 4.25 montre que les changements de l'énergie de déformation sont indécélables, aucune détection et localisation ne peuvent être obtenue pour un seuil  $z_s = 2$ . Par contre, pour le cas des ELB (Fig.4.26), le défaut de faible amplitude sera détecté cependant de fausses détection apparaissent lorsque le niveau de bruit augmente, ce qui n'est pas le cas pour le défaut plus sévère.

Concernant le nombre de points de mesure pour la méthode basée sur le changement de l'énergie de déformation, la figure 4.27 montre qu'en présence de bruit les résultats obtenus avec les capteurs ponctuels sont fortement dégradés et ne permettent pas la détection du défaut, ce qui n'est pas le cas avec les ELB où le bruit a peu d'influence (Fig. 4.28).

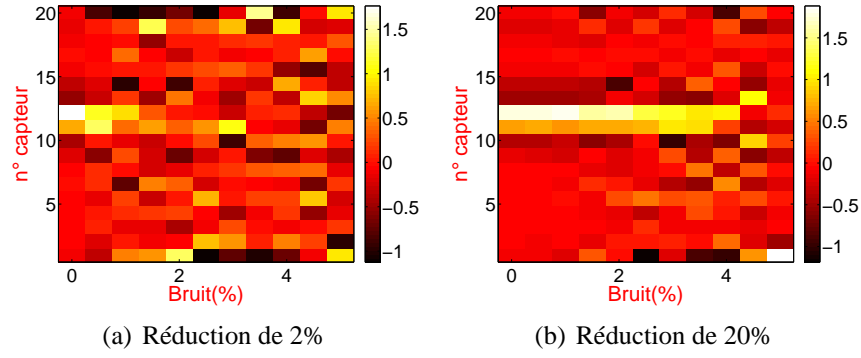


FIGURE 4.25 – Changement de l'énergie de déformation à partir des capteurs ponctuels pour des endommagements de 2% et 20%, et différents niveaux de bruit ( $z_s = 2$ )

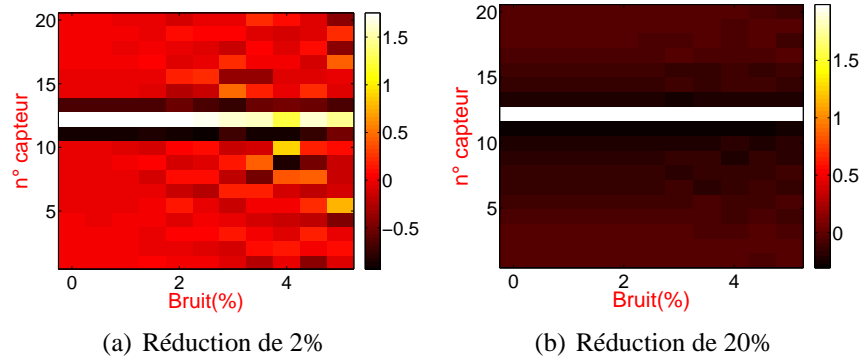


FIGURE 4.26 – Changement de l'énergie de déformation à partir des ELB pour des endommagements de 2% et 20%, et différents niveaux de bruit ( $z_s = 2$ )

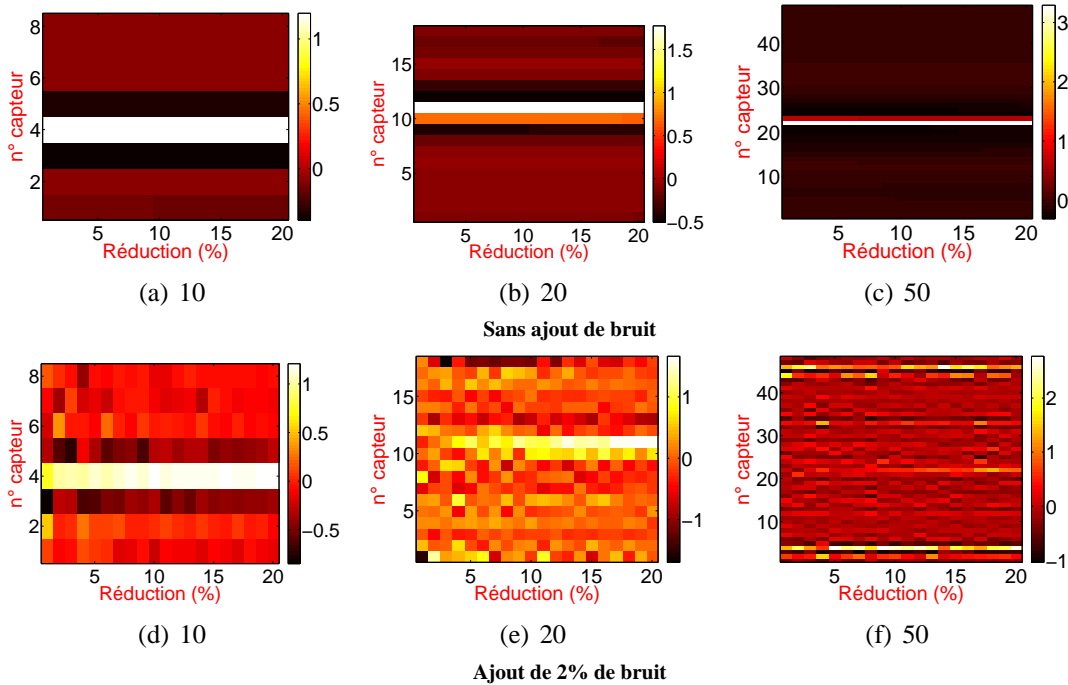


FIGURE 4.27 – Changement de l'énergie de déformation en fonction du nombre de capteurs ponctuels ( $z_s = 2$ )

#### 4.5.4 Courbure de FRF

La méthode fondée sur la courbure des FRF, détaillée dans le Chapitre 2, englobe les trois premières étapes de détection proposée par Rytter [7]. Elle utilise seulement les FRF issues des données mesu-

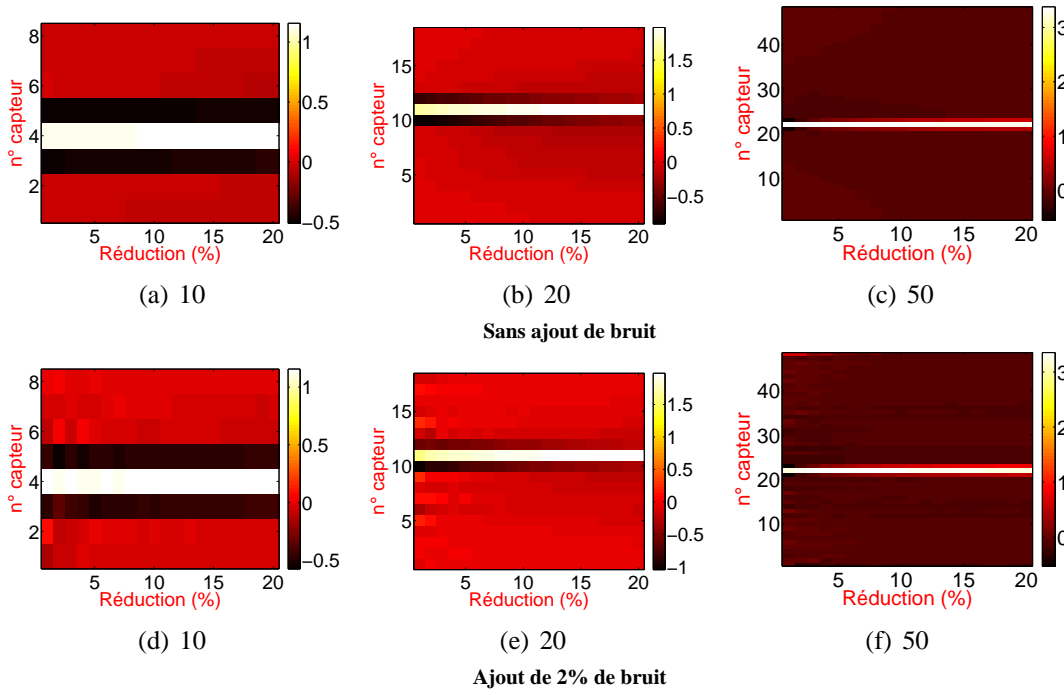


FIGURE 4.28 – Variation de l'énergie de déformation en fonction du nombre d'ELB ( $z_s = 2$ )

rées sur une bande de fréquence prédéterminée, sans avoir recours à une identification modale.

Par ailleurs, nous avons considéré ici que le signal d'excitation est inconnu car, durant les essais, nous avons eu des problèmes avec le capteur de force. Ainsi, la FRF ne peut être calculée et nous avons alors utilisé la TF en lieu et place de la FRF soit :

$$\Delta(TF_i(\omega))'' = \sum_{\omega=\omega_{initial}}^{\omega_{final}} |(TF_i^*(\omega))'' - (TF_i(\omega))''| \quad (4.9)$$

Maia et Silvia [8] ont constaté, en testant différents intervalles de fréquence, que la méthode fonctionne mieux pour un intervalle inférieur à la première fréquence propre de la structure. Pour des intervalles de fréquences plus larges et plus élevés en fréquences, y compris comprenant plusieurs modes, la différence de courbure de la FRF entre l'état sain et l'état endommagé devient moins significative.

Nous allons tester la méthode numériquement sur notre cas d'application pour évaluer son efficacité en fonction de différents paramètres. Le modèle EF de la poutre est utilisé pour simuler les réponses temporelles de 20 points de mesure pour une excitation par choc de la poutre saine et pour différents cas de défaut.

Nous avons choisi le même niveau de force que lors d'un des essais expérimentaux, soit  $129N$  appliquée au point  $x_j = 578mm$ .

La figure 4.29 montre les transformées de Fourier obtenues à partir de l'accélération du point  $n^\circ 5$  pour les différents états de la poutre, tracées sur une bande de fréquence  $[0 \ 800] \text{ Hz}$ .

Pour rappel, les 4 premières fréquences propres de la poutre saine sont égales à  $78.83 \text{ Hz}$ ,  $217.29 \text{ Hz}$ ,  $425.98 \text{ Hz}$  et  $704.17 \text{ Hz}$ .



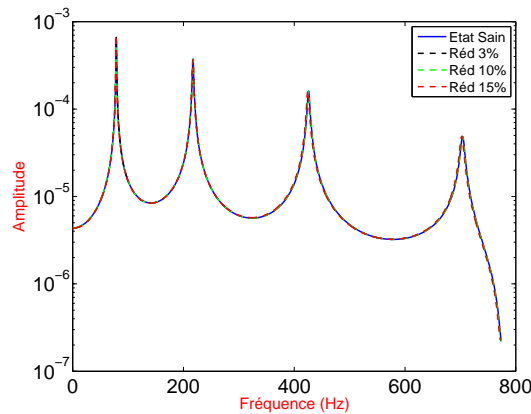


FIGURE 4.29 – Transformées de Fourier numériques du signal d'accélération au point n° 5 pour différents états de la poutre

#### 4.5.4.1 Influence de l'intervalle de fréquences

Dans cette partie, afin d'étudier la sensibilité de la méthode par rapport à l'intervalle de fréquences choisi, nous avons choisi d'appliquer la méthode pour trois bandes différentes :  $[0\ 100]\ Hz$ ,  $[0\ 200]\ Hz$  et  $[0\ 500]\ Hz$ .

Les figures 4.30(a), 4.30(b) et 4.30(c) présentent les courbures de TF obtenues pour différents niveaux d'endommagement et différentes bandes de fréquence. Il apparaît que lorsqu'une large bande de fréquences est considérée dans le calcul de la différence de la courbure de TF, les résultats ne sont pas exploitables pour détecter le défaut. Seule la première plage de fréquence choisie permet de localiser et de quantifier le défaut (Fig. 4.30(a)).

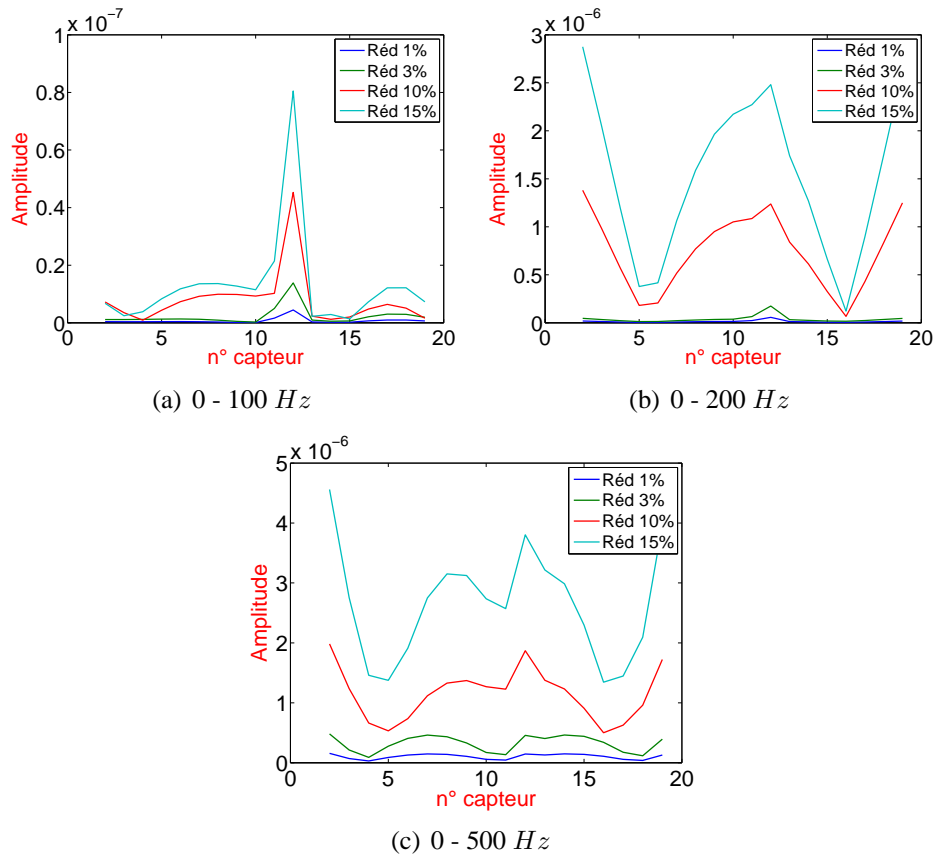
#### 4.5.4.2 Influence du nombre de points de mesure

En général, une des limitations principales pour l'application expérimentale des méthodes de détection d'endommagement réside dans le nombre réduit de points de mesure à cause du faible nombre de capteurs disponibles, souvent du fait du coût de l'instrumentation (carte d'acquisition et capteurs). D'autre part, pour les structures légères, l'ajout de nombreux capteurs sur celle-ci peut également perturber la distribution de masse et modifier ainsi son comportement vibratoire.

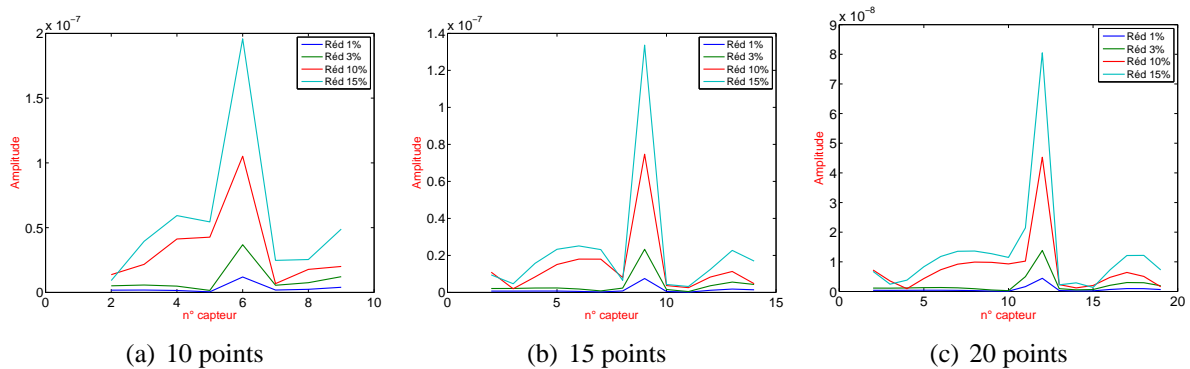
Pour étudier l'efficacité de la méthode à ce sujet, trois cas ont été considérés pour les simulations numériques : 10, 15 et 20 points de mesure, régulièrement espacés le long de la poutre. Les résultats sont représentés sur la figure 4.31. La méthode arrive à détecter, localiser et quantifier le défaut même avec un faible nombre de capteurs. Par ailleurs, les valeurs de courbure de TF ne sont pas déterminées aux bords à cause du schéma de dérivation numérique.

#### 4.5.4.3 Détection de défauts multiples

Des simulations numériques ont été réalisées afin d'appréhender la capacité de la méthode à détecter et localiser des endommagements multiples. La poutre est discrétisée en 100 éléments finis et les signaux



**FIGURE 4.30 – Courbure de la TF pour différents niveaux d'endommagement en fonction de la bande de fréquence choisie**



**FIGURE 4.31 – Courbure de TF pour différents niveaux d'endommagement pour différentes configurations des points de mesure - bande de fréquences étudiée [0-100]  $Hz$**

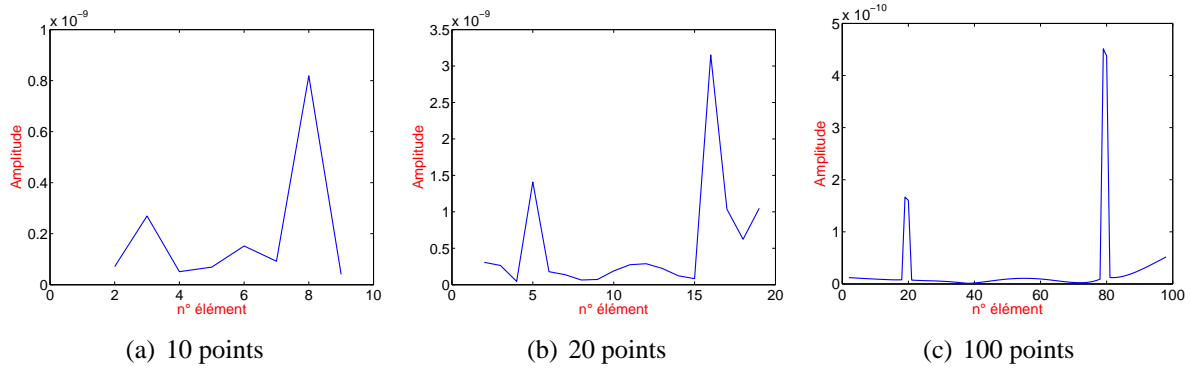
d'accélération numériques de 21 points de mesures, régulièrement espacés le long de la poutre, sont utilisés. Les réductions de section ont été simultanément considérées sur les éléments 20 et 80 du maillage EF.

### Cas 1 : deux endommagements de même niveau

Une réduction de 10 % de la section est considérée sur les éléments 20 et 80.

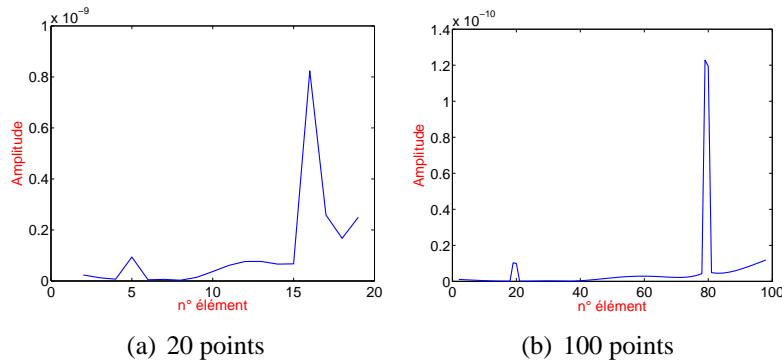
### Cas 2 : deux endommagements de niveau différent

Les éléments 20 et 80 sont réduits respectivement de 5% et 25 %. Lorsque plusieurs endommagements sont présents, il faut rechercher tous les maxima locaux qui vont permettre d'identifier les lieux



**FIGURE 4.32 – Courbure de TF pour deux endommagements de même niveau et différents nombres de points de mesure**

d'endommagement.



**FIGURE 4.33 – Courbure de TF pour deux endommagements de niveau différent pour différents nombres de points de mesure**

Pour les deux cas de défauts multiples choisis, la méthode est capable de trouver deux maxima coïncidant avec les positions réelles des défauts et de les quantifier (Fig. 4.32 et 4.33), le pic d'amplitude plus importante correspondant bien à l'endommagement le plus sévère.

## 4.6 Quantification

Afin d'évaluer la capacité des méthodes précédentes à quantifier l'endommagement, les résultats présentés pour les différentes méthodes (courbure modale, flexibilité, courbure de flexibilité, ...) sont représentés cette fois-ci sans normalisation par rapport au maximum pour chacun des points de l'axe des abscisses (cas de défaut ou niveau de bruit). Cette représentation permet de mieux se rendre compte de la capacité des méthodes à quantifier le défaut. En effet, l'échelle de couleurs s'accroît dans ce cas lorsque le défaut devient plus important, ce qui est le cas pour l'ensemble des méthodes qui sont donc capables de quantifier l'endommagement (Fig. 4.34, 4.35, 4.36). Pour la méthode fondée sur l'énergie de déformation, ce critère ne peut pas être utilisé car la détection n'est pas absolue et se fait par dépassement d'un seuil.

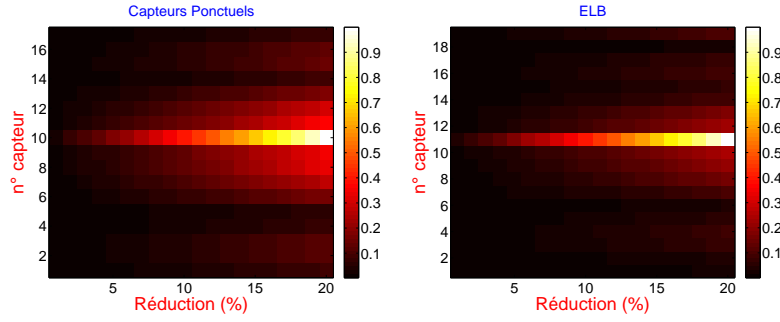


FIGURE 4.34 – Quantification par la méthode de courbure modale à partir de deux types de capteurs (ponctuels et ELB)

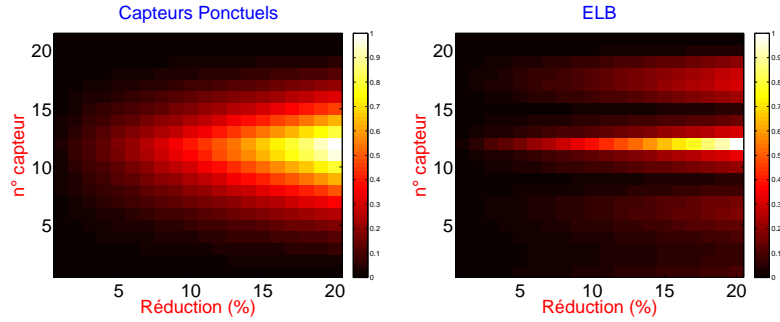


FIGURE 4.35 – Quantification par la méthode de flexibilité à partir de deux types de capteurs (ponctuels et ELB)

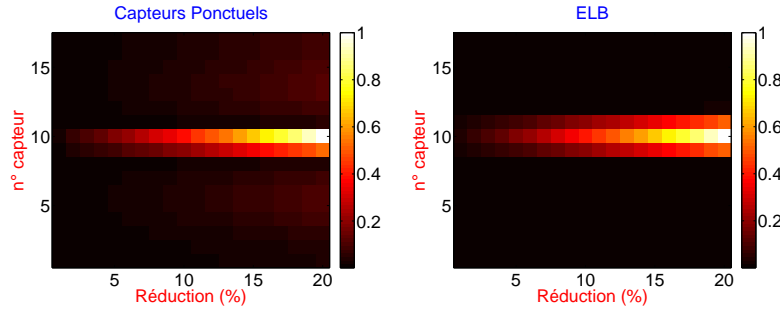


FIGURE 4.36 – Quantification par la méthode de courbure de flexibilité à partir de deux types de capteurs (ponctuels et ELB)

## 4.7 Méthode du filtrage modal

Dans ce paragraphe, nous allons utiliser la méthode particulière fondée sur le filtrage modal évoquée dans le Chapitre 2. Pour illustrer l'efficacité du filtrage modal sur la détection de défauts pour la poutre, nous avons supposé que l'excitation est inconnue et avons donc utilisé les transformées de Fourier des signaux numériques (Fig. 4.37). Nous avons choisi arbitrairement les déplacements temporels du modèle numérique de la poutre qui sont obtenus en excitant la poutre par un choc d'amplitude  $129N$  à l'abscisse  $x_j = 578mm$ . Le signal est échantillonné avec une fréquence égale à  $10240Hz$ , identique à celle des essais expérimentaux. La durée du signal est  $T_{acq} = 2s$ .

La figure 4.38 montre le spectre issu du filtrage modal appliqué aux 6 premiers modes de la poutre saine. Seul le mode pour lequel le filtrage modal est appliqué est présent dans le spectre, tous les autres modes sont filtrés.

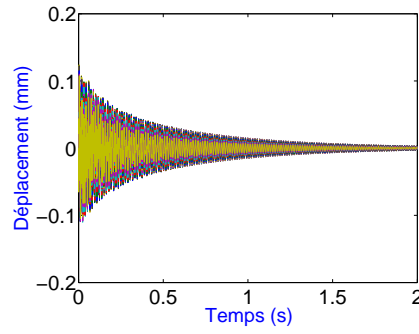


FIGURE 4.37 – Déplacement numérique en différents points de la poutre excitée

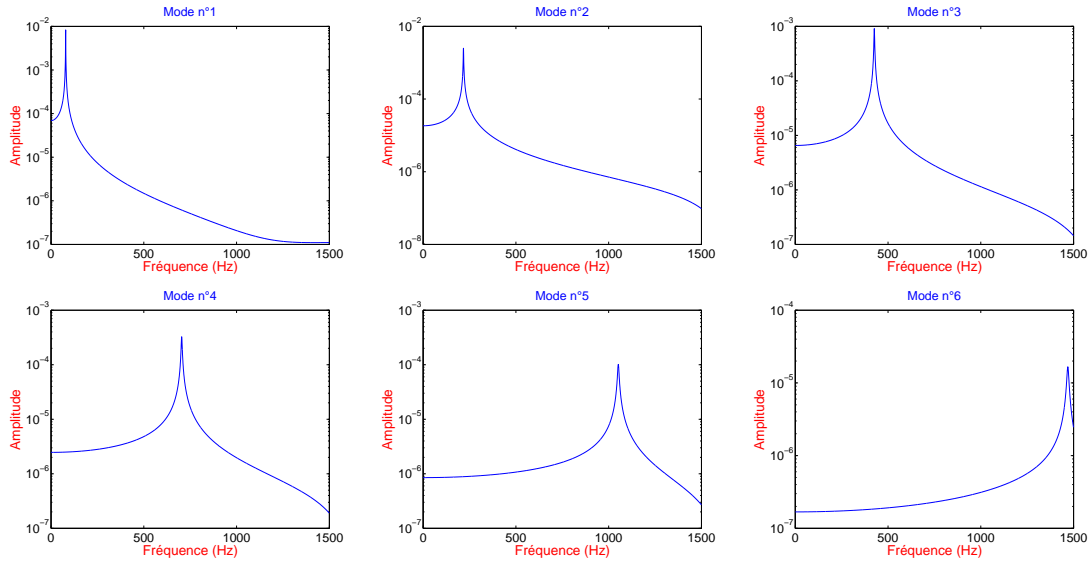


FIGURE 4.38 – Filtrage modal appliqué aux 6 premiers modes de la poutre E-E saine

L'application du filtrage modal obtenue après endommagement de la poutre est illustrée sur la figure 4.39.

Comme cela avait été démontré par les auteurs de la méthode [11], la présence d'un défaut va affecter l'allure des courbes. Des pics vont apparaître au niveau des fréquences propres filtrées. Ces pics sont

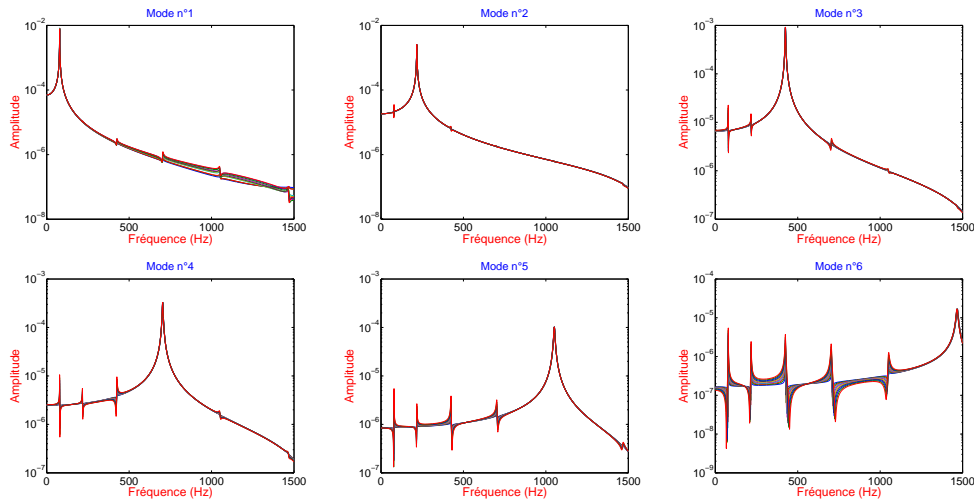


FIGURE 4.39 – Filtrage modal appliqué aux 6 premiers modes de la poutre E-E pour les différents cas de défaut

d'autant plus importants que le filtrage modal est appliqué à un mode d'ordre élevé. L'apparition de ces pics caractérise donc une modification de la structure qui implique que le filtrage modal, basé sur la structure saine, n'est plus aussi efficace du fait de la modification structurale.

Par ailleurs, lorsqu'une modification globale affecte la structure, le spectre du filtre modal est décalé en fréquence sans changement de forme, c'est-à-dire apparition de pics.

En théorie, cette technique semble efficace pour la détection de défauts. Dans le Chapitre 7, nous utiliserons cette méthode sur les données expérimentales obtenues pour la poutre E-E.

## 4.8 Etude de fiabilité par les probabilités

Il est important de rappeler ce que signifie la détection pour chacune des méthodes. La détection pour les méthodes de flexibilité, de courbure de flexibilité et de courbure modale est réalisée dès lors qu'il existe un maximum local. Ces méthodes présentent également l'avantage de pouvoir quantifier l'endommagement, les valeurs des indicateurs étant fonction du degré de sévérité de l'endommagement.

La méthode de l'indicateur d'endommagement fondée sur l'énergie de déformation ne fournit pas un indicateur absolu, comme les méthodes précédentes. Elle introduit la notion de seuil de détection : un endommagement est détecté si l'indicateur normalisé dépasse une valeur prédéterminée.

Pour les méthodes de flexibilité, de courbure de flexibilité et de courbure modales, si  $n_s$  représente le nombre de réponses bruitées simulées pour un niveau de bruit donné et  $n_d$  le nombre de fois que l'endommagement réel est détecté, la probabilité de détection sera donnée par [5] :

$$P_d = \frac{n_d}{n_s} \quad (4.10)$$

La probabilité de fausse alarme sera donnée par le complémentaire de la probabilité de détection :

$$P_f = 1 - \frac{n_d}{n_s} \quad (4.11)$$

Par contre, pour l'indicateur d'endommagement, le nombre de fois que l'endommagement réel est détecté est fonction du seuil de détection  $z_s$  retenu

$$P_d = \frac{n_d(z_s)}{n_s} \quad (4.12)$$

Le choix de ce seuil est donc primordial pour correctement identifier les endommagements. Choisi trop faible, des endommagements fantômes (fausses alarmes) seront détectés et trop élevé, la non détection d'endommagements effectivement présents est à craindre.

### 4.8.1 Critère de classement

En statistique, la détermination de la variation d'une variable dans un système est jugée par rapport à la valeur obtenue lorsque ce système fonctionne normalement.

Dans notre cas, la variable est l'indicateur d'endommagement étudié (différence de courbure modale, courbure de flexibilité, ...). La variation est donc la soustraction de la valeur moyenne à la valeur obtenue en un point  $i$ .

$$\varepsilon_{x_i} = x_i - \bar{x}$$

où  $x_i$  est la valeur de l'indicateur au point  $i$  et  $\bar{x}$  la valeur moyenne de tous les points.

Afin de déterminer si un défaut est présent, il faut savoir si la variation de l'indicateur est grande par rapport à la variance.

En analyse statistique monovariée, la présence d'une variation significative est habituellement conclue si l'écart entre une valeur et la moyenne est plus de trois fois l'écart-type, ce qui correspond à un intervalle de confiance de 95%, soit l'inéquation :

$$-3\sigma_{x_i} \leq \varepsilon_{x_i} \leq +3\sigma_{x_i} \quad (4.13)$$

où  $\varepsilon_x$  est la valeur du résidu de l'indicateur  $x$  par rapport à la moyenne et  $\sigma_x$  la variance.

Dans le but d'obtenir les probabilités de détection d'endommagement, nous allons considérer le bruit numérique ajouté et le paramètre modélisant la réduction de rigidité comme deux variables aléatoires.

Afin d'étudier la performance des différentes méthodes, la méthode de Monte-Carlo est utilisée.

Dans le paragraphe suivant, nous allons expliquer brièvement le principe de la méthode. Pour plus de détails, on se référera à [1] et à l'annexe B.

#### La fonction de performance et indice de fiabilité

Le problème de la fiabilité est formulé en termes de fonction de performance ou fonction d'état limite  $g(X)$ , avec  $g(X) = R(X) - S(X) \leq 0$  :

$$\begin{aligned} \mu_{g(X)} &= \mu_{R(X)} - \mu_{S(X)} \\ \sigma_{g(X)}^2 &= \sigma_{R(X)}^2 + \sigma_{S(X)}^2 \end{aligned}$$

La technique de Monte-Carlo consiste à déterminer un estimateur de  $p_f$  par la succession de variables aléatoires indépendantes,  $p_f$  étant la probabilité définie par :

$$p_f = \text{Prob}[R(X) \leq S(X)] \Rightarrow p_f = \text{Prob}[R(X) - S(X) \leq 0] = \text{Prob}[g(X) \leq 0]$$

$$p_f = \Phi\left(\frac{0 - \mu_{g(X)}}{\sigma_{g(X)}}\right) = \Phi\left(\frac{-\mu_{g(X)}}{\sigma_{g(X)}}\right)$$

La détermination de l'indice de fiabilité  $\beta$  permet d'accéder à une valeur approchée de  $p_f$ . Il est défini

par la relation suivante :

$$\beta = -\Phi^{-1}(p_f) = \Phi\left(\frac{\mu_{g(X)}}{\sigma_{g(X)}}\right) = \frac{\mu_{R(X)} - \mu_{S(X)}}{\sqrt{\sigma_{R(X)}^2 + \sigma_{S(X)}^2}}$$

avec  $\Phi$  la loi de distribution gaussienne de moyenne nulle et d'écart-type 1. Pour chaque variable aléatoire un  $\beta$  est obtenu.

### 4.8.2 Principe de l'étude

Des simulations de Monte-Carlo sont réalisées sur la poutre E-E endommagée pour dix cas de défaut (de 2% à 20% par pas de 2%) et pour dix niveaux de bruit (de 0% à 10% par pas de 1%), soit pour 100 cas au total. Ceci va permettre d'évaluer la probabilité de détection des différentes méthodes vis-à-vis du type de capteur. Les quatre premiers modes de vibration sont pris en compte pour le calcul des différentes méthodes de détection. Ensuite, nous appliquons la condition définie en (4.13) pour détecter la présence d'un défaut. Dans un premier temps, nous avons considérés 20 points de mesure régulièrement espacés le long de la poutre.

### 4.8.3 Simulations avec ajout du bruit numérique sur les déformées modales

La réduction de section affecte la hauteur  $\Delta h$ , et a été introduit sur l'élément 56 du modèle éléments finis, soit à 395mm de l'extrémité droite de la poutre. Afin de se rapprocher du bruit des capteurs obtenu expérimentalement (Chapitre 7), des niveaux de bruits ou perturbation  $p$ , de 0 à 10% avec un pas de 1%, ont été ajoutés.

La réduction de section et le bruit sont alors deux variables aléatoires gaussiennes dont les caractéristiques sont :

- pour la réduction de section :  $\mu_{red} = \Delta h$  et  $\sigma_{red} = 0.02\mu_{red}$
- pour le bruit ajouté :  $\mu_p = p$  et  $\sigma_p = 0.15\mu_p$

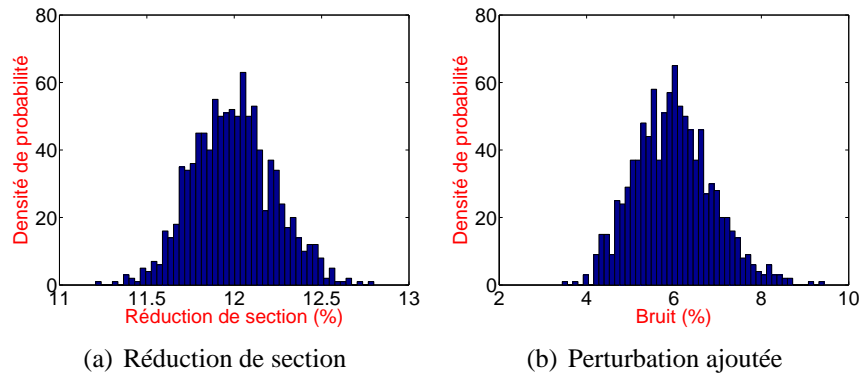
Une génération de 1000 réalisations de ces variables aléatoires est donc effectuée pour chaque niveau de bruit et chaque cas d'endommagement. Les figures 4.40(b) et 4.40(a) montrent un exemple de courbes de densité de probabilité obtenues pour chacune deux variables (réduction de section et bruit).

Nous avons ajouté le bruit sur les déformées modales. Il peut également être ajouté sur les fréquences propres cependant nous avons déjà démontré en 4.4.1 que les fréquences propres sont peu sensibles aux défauts. Le bruit sera donc uniquement présent au niveau des déformées modales.

La déformée modale bruitée,  $\phi_k^p$ , est définie par :

$$\phi_k^p = \phi_k \cdot (1 + \varepsilon_k) \quad (4.14)$$





**FIGURE 4.40 – Fonction de distribution de probabilité pour les deux variables aléatoires : réduction de section de moyenne  $\mu_{red} = 12\%$  et perturbation ajoutée de moyenne  $\mu_p = 6\%$**

avec  $\varepsilon_k = N(0, \sigma_k)$  où  $\sigma_k$  est égal au produit de  $\mu_p \pm \sigma_p$  par le maximum de  $\phi_k$ .

Pour les ELB et les JP, les déformées modales utilisées sont les intégrales des courbures modales et les courbures modales respectivement.

Le tableau 4.5 montre la dispersion pour les quatre premières déformées modales obtenues à partir des capteurs ponctuels pour 1000 réalisations avec l'addition d'un bruit gaussien de 5% de moyenne.

Capteur	x (mm)	$\Delta\sigma/\mu(\%)$			
		Mode n° 1	Mode n° 2	Mode n° 3	Mode n° 4
n° 1	18	2.335	0.94	0.51	0.29
n° 2	85	0.132	0.04	0.01	0.00
n° 3	152	0.034	0.00	0.00	0.01
n° 4	219	0.010	0.00	0.03	0.09
n° 5	286	0.002	0.01	0.08	0.05
n° 6	355	0.000	9.25	0.06	2.07
n° 7	424	0.002	0.07	0.09	0.00
n° 8	492	0.010	0.05	0.03	0.04
n° 9	570	0.035	0.06	0.00	0.06
n° 10	635	0.131	0.09	0.01	0.05
n° 11	701	2.334	1.21	0.51	0.36

**TABEAU 4.5 – Ecart-types pour les déformées modales obtenues par des capteurs ponctuels pour 1000 réalisations**

Avant d'effectuer l'analyse de sensibilité, il est nécessaire de déterminer si le nombre de simulations  $n_s$  est suffisant pour obtenir une convergence de la moyenne et de l'écart type des variables aléatoires. La figure 4.41 montre les résultats de l'analyse de convergence de l'indice de fiabilité  $\beta$  obtenu avec la courbure modale pour les différents cas de défaut et sans ajout de bruit. On constate qu'à partir de  $n_s = 500$ , qui est un nombre de réalisations faible,  $\beta$  est stabilisé.

On voit que  $\beta$  se stabilise progressivement lorsque le nombre de réalisations de la variable aléatoire est grand (la loi des grands nombres). Ceci implique que plus le nombre de réalisations est élevé, plus les résultats de probabilité seront précis.

Les méthodes de courbure modale et de courbure de flexibilité ne recherchent que la variation maximale. Pour certains cas, cela peut s'avérer ambigu de déterminer si ces changements indiquent des endommagements à un ou plusieurs endroits, généralement voisins. Pour lever cette ambiguïté, nous avons calculé les probabilités de détection en considérant un intervalle comme critère de localisation.

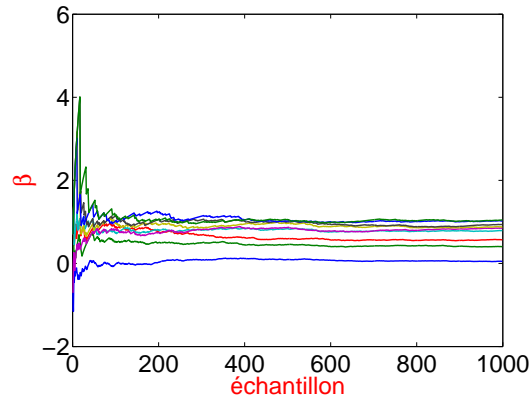


FIGURE 4.41 – Indice de fiabilité  $\beta$  calculé pour la méthode de la courbure modale

L'intervalle a été choisi comme étant à  $\pm 5\%$  de la position réelle du défaut.

Les probabilités de détection pour les différentes méthodes de détection d'endommagement et les différents types de capteurs sont illustrées sur les figures 4.42, 4.43 et 4.44.

Pour l'ensemble des méthodes, les probabilités de détection se dégradent lorsque l'importance du défaut diminue et que le niveau de bruit augmente. Les résultats montrent notamment qu'en présence de bruit, la probabilité de détecter un endommagement avec des ELB est plus élevée que celle obtenue par les autres types de capteurs.

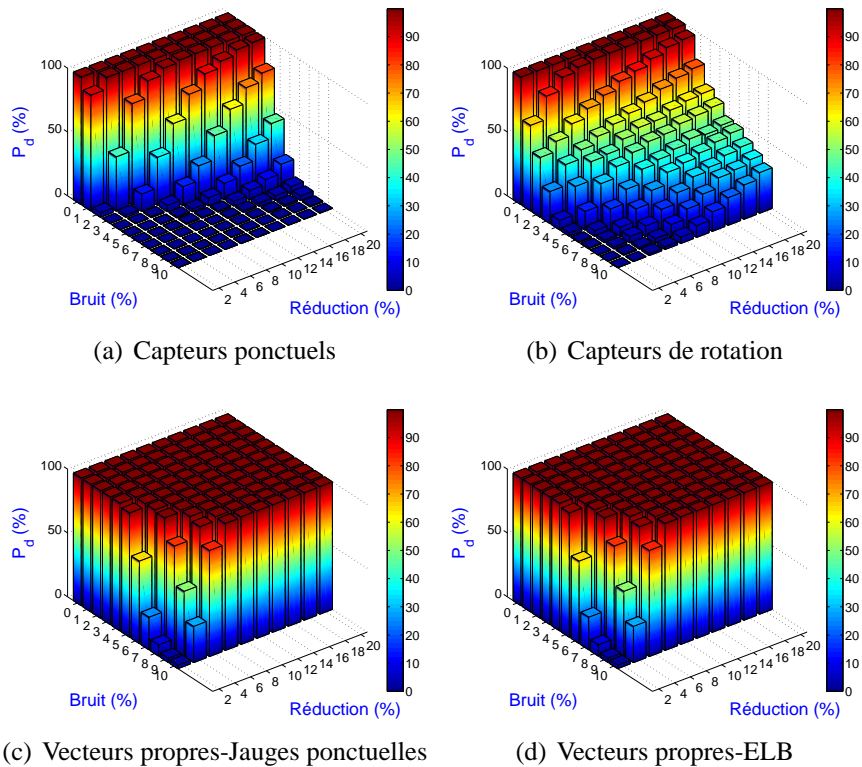


FIGURE 4.42 – Méthode des courbures modales avec 20 capteurs

Pour estimer les probabilités de détection et de localisation d'un endommagement dans une poutre avec un faible nombre de capteurs, nous avons calculé les probabilités de la même manière que pré-

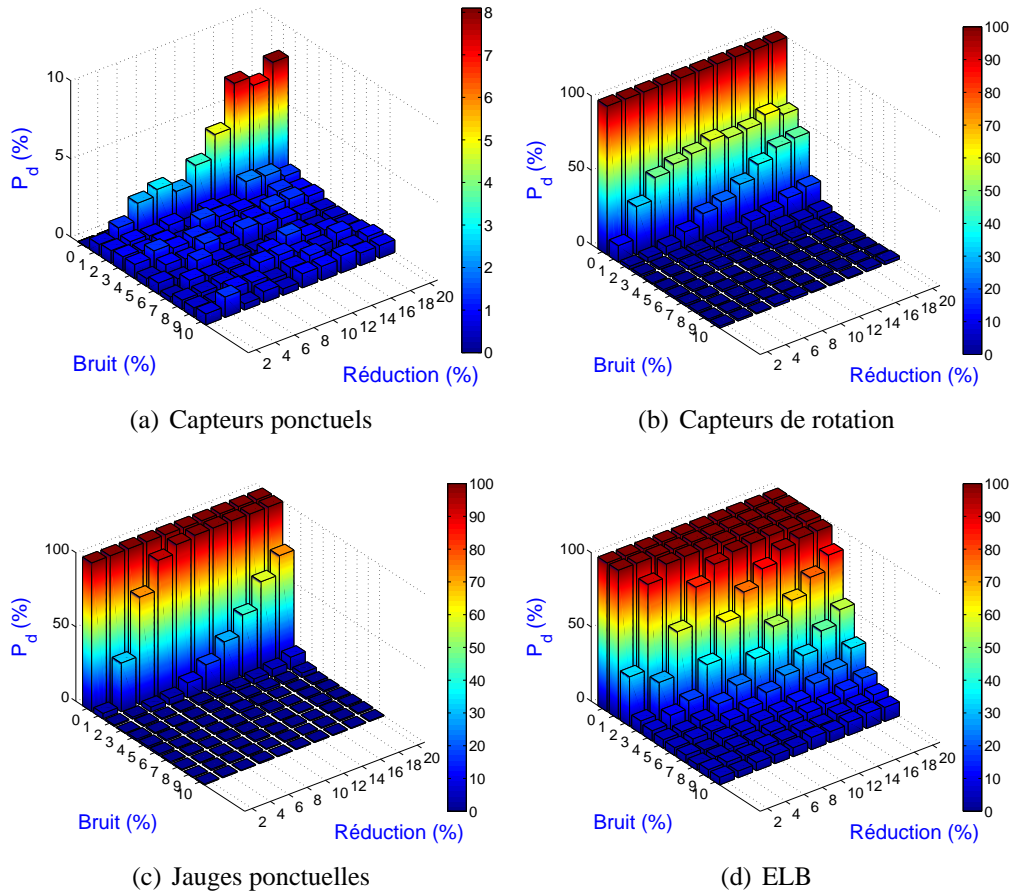


FIGURE 4.43 – Méthode des courbures de flexibilité avec 20 capteurs

cédemment mais cette fois avec 11 capteurs seulement.

Les résultats de trois méthodes (Courbure modale, courbure de flexibilité et indicateur d'endommagement) pour les différents types de capteurs sont illustrés sur les figures 4.45, 4.46 et 4.47.

*On peut conclure qu'à nombre de capteurs et bruit de la chaîne d'acquisition identiques, l'utilisation d'ELB augmentera la probabilité de détection d'un endommagement. Plus le nombre de capteurs utilisés sera faible, plus la probabilité de détecter le défaut le sera également.*

Pour se rapprocher des conditions expérimentales, il serait intéressant d'effectuer le calcul de probabilités de détection et de localisation en considérant un ajout de bruit sur les signaux temporels simulés. Cependant, générer 1000 réalisations dans ce cas est relativement coûteux en temps de calcul, notamment la phase d'identification des paramètres modaux à partir des signaux numériques. Cette étude n'a donc pas été réalisée durant la thèse.

## 4.9 Optimisation du placement des capteurs

L'analyse vibratoire repose sur l'acquisition de mesures vibratoires à l'aide de capteurs placés sur la structure. La fiabilité de ces mesures est donc directement conditionnée par l'emplacement des

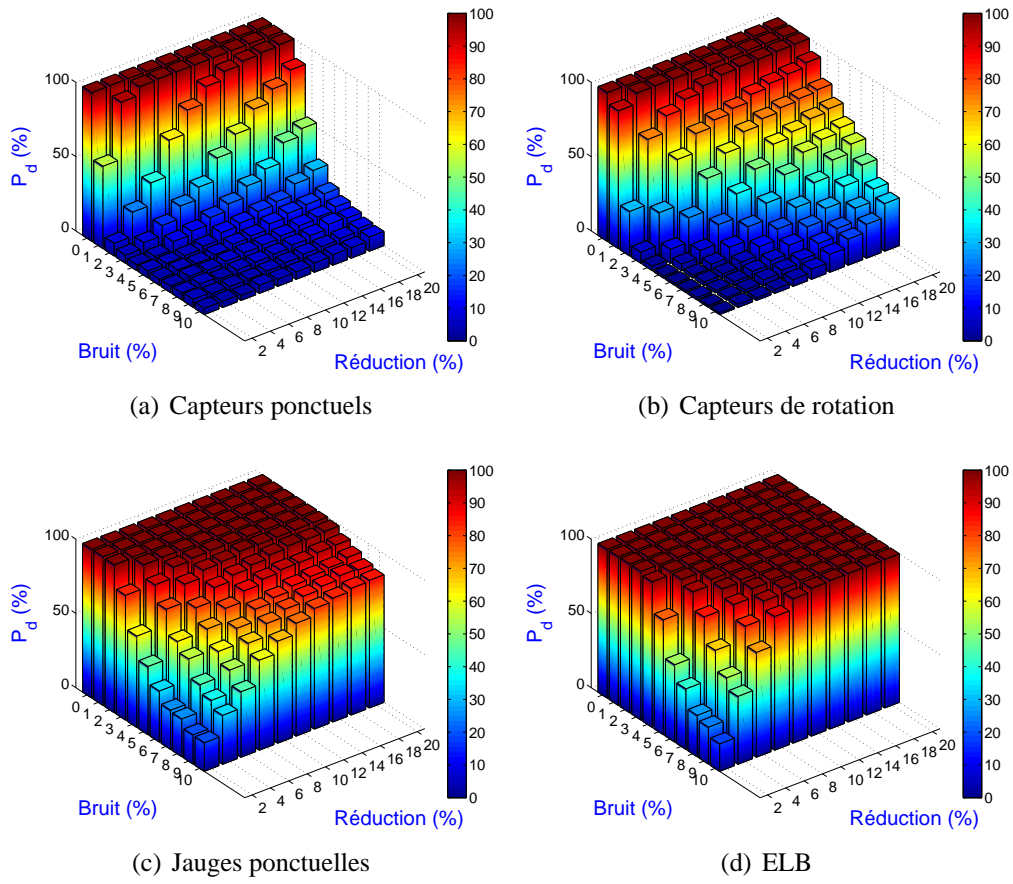


FIGURE 4.44 – Méthode de l'indicateur d'endommagement avec 20 capteurs ( $z_s = 2$ )

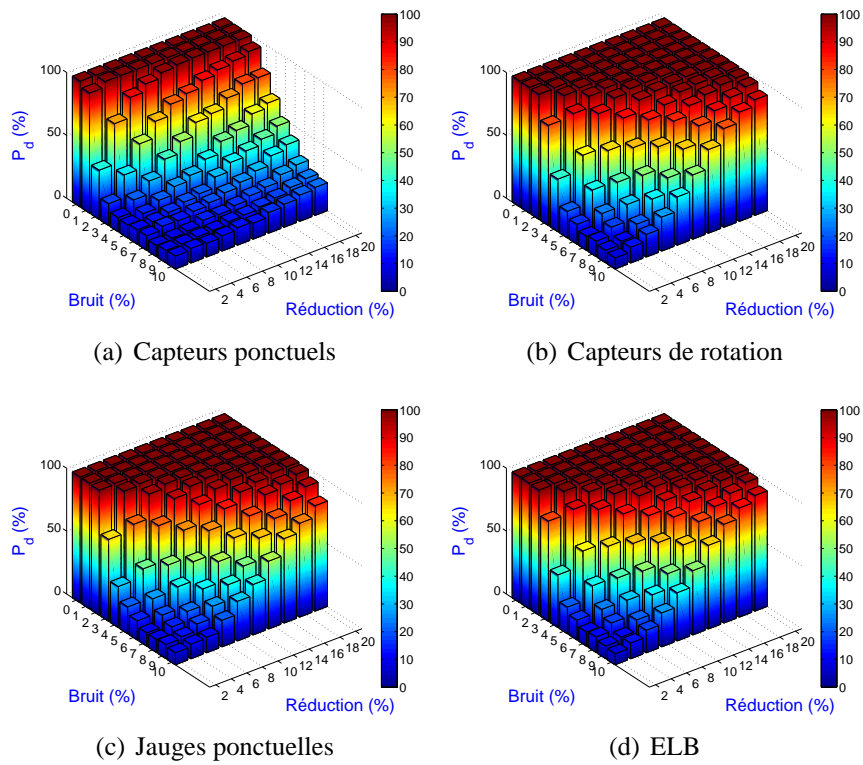


FIGURE 4.45 – Méthode des courbures modales avec 11 capteurs

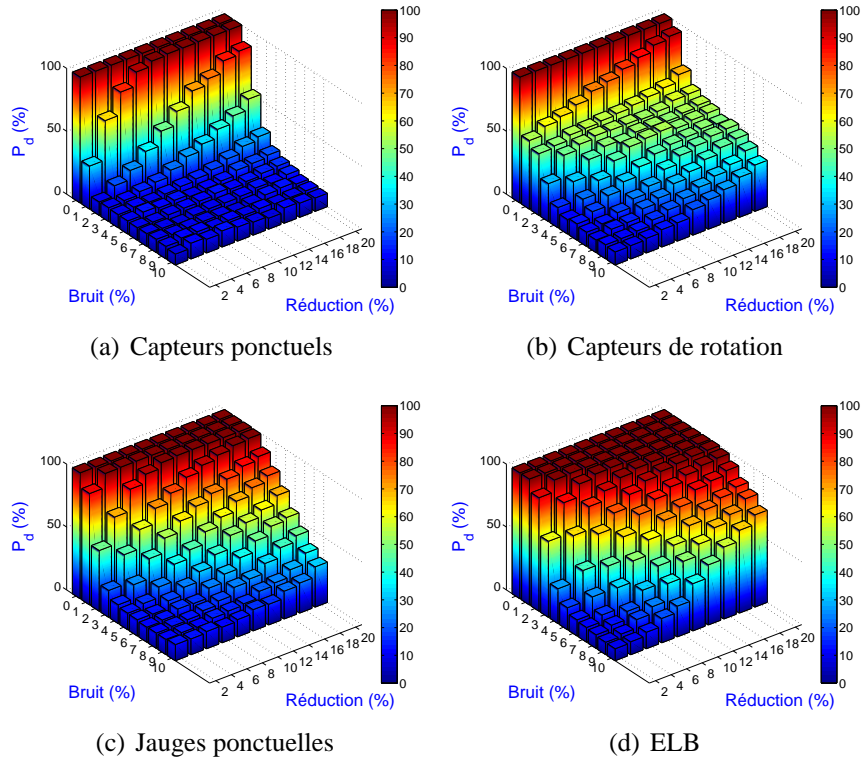


FIGURE 4.46 – Méthode des courbures de flexibilité avec 11 capteurs

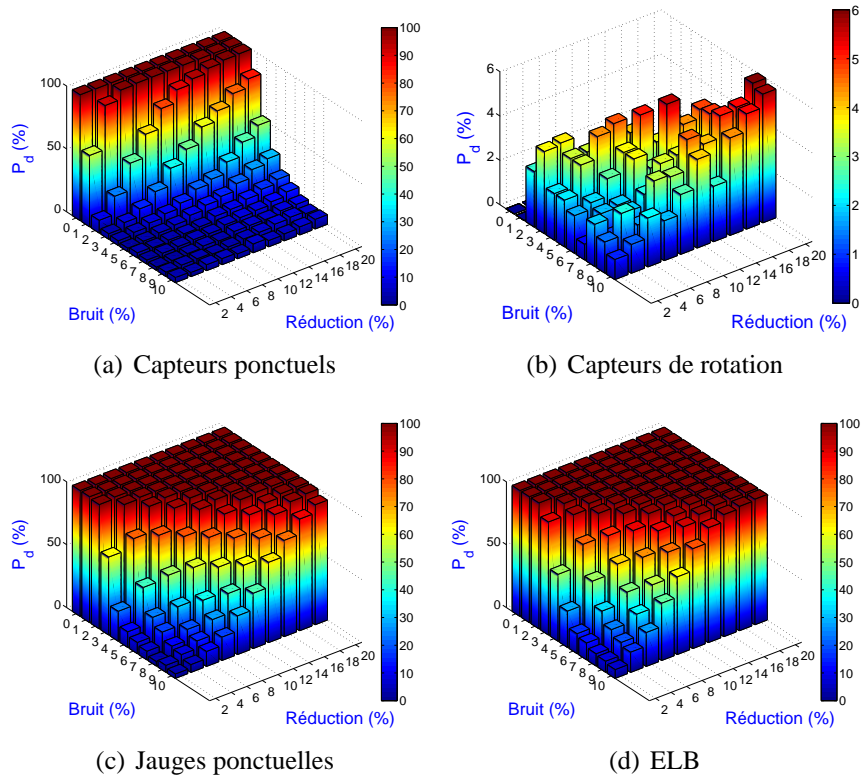


FIGURE 4.47 – Méthode de l'indicateur d'endommagement avec 11 capteurs

capteurs. Il n'est en effet pas toujours possible de se positionner au plus près de l'élément à surveiller pour des raisons d'accessibilité. Il est donc essentiel de choisir d'autres points de mesure riches en informations vibratoires, permettant à la fois de détecter des défauts et de suivre leur évolution dans



le temps.

A noter que, d'un point de vue pratique, le recours à un maillage fin implique la mise en place d'un grand nombre de capteurs et d'un système d'acquisition autorisant un transfert de données important et coûteux. Pour cela, le recours à un schéma d'instrumentation optimal des capteurs est recommandé dans le domaine de surveillance de santé de structure.

### 4.9.1 Application de la EI sur des données numériques

Les simulations sont réalisées sur le modèle EF de la poutre avec les caractéristiques répertoriées dans le tableau 4.2. La poutre est discrétisée par 20 éléments, donc 21 nœuds avec 2 DDL par nœud (déplacement vertical et rotation). Des capteurs ponctuels sont considérés sur les nœuds du maillage (ddl du déplacement vertical), régulièrement répartis avec un pas de  $33.5mm$ . La configuration de capteurs est présentée sur la figure 4.48.



FIGURE 4.48 – Modèle EF de la poutre E-E avec 20 points

L'optimisation est menée par une stratégie itérative à partir d'une condition de convergence. Lorsque cette condition est satisfaite, le processus d'optimisation s'arrête et le nombre de nœuds est enregistré. L'objectif du placement de capteurs sur la poutre vise à observer les quatre premiers modes de la poutre. Il nous faut alors au minimum 4 capteurs pour faire une identification modale correcte. Nous avons considéré ainsi que seulement 4 capteurs sont disponibles et que nous voulons les placer judicieusement sur la poutre.

A partir des données issues des simulations numériques, nous avons appliqué tout d'abord la méthode *"Effective Independance"* recommandée par [12] et [13]. Partant d'un nombre initial de capteurs  $m = 20$ , des coefficients d'indépendance effective  $E_D$  sont calculés. L'indice du capteur ayant la valeur la plus faible est éliminé de la série de capteurs, puis les coefficients  $E_D$  sont recalculés avec les modes propres réduits. Ce processus itératif s'arrête jusqu'à ce que le nombre de capteurs placés sur la poutre soit égal à 4.

$$E_D = [\phi\Psi]^2 \cdot \lambda^{-1} \cdot 1_n \quad (4.15)$$

Les résultats obtenus par l'application de la méthode sont présentés sur la figure 4.49. Les points en rouge indiquent la position des capteurs choisis.

Les résultats obtenus par cette technique génère un espacement relativement uniforme pour les positions des capteurs le long de la poutre. Les capteurs n° 5, n° 9, n° 13 et n° 16, qui se trouvent aux abscisses  $148.4 mm$ ,  $296.8 mm$ ,  $445.3 mm$  et  $556.6 mm$  sont les positions optimales pour garantir l'indépendance linéaire des modes.

A l'aide de cet algorithme de placement optimal, si l'on vise plus de modes pour un même nombre de capteurs, c'est-à-dire quatre capteurs, le placement est alors différent.

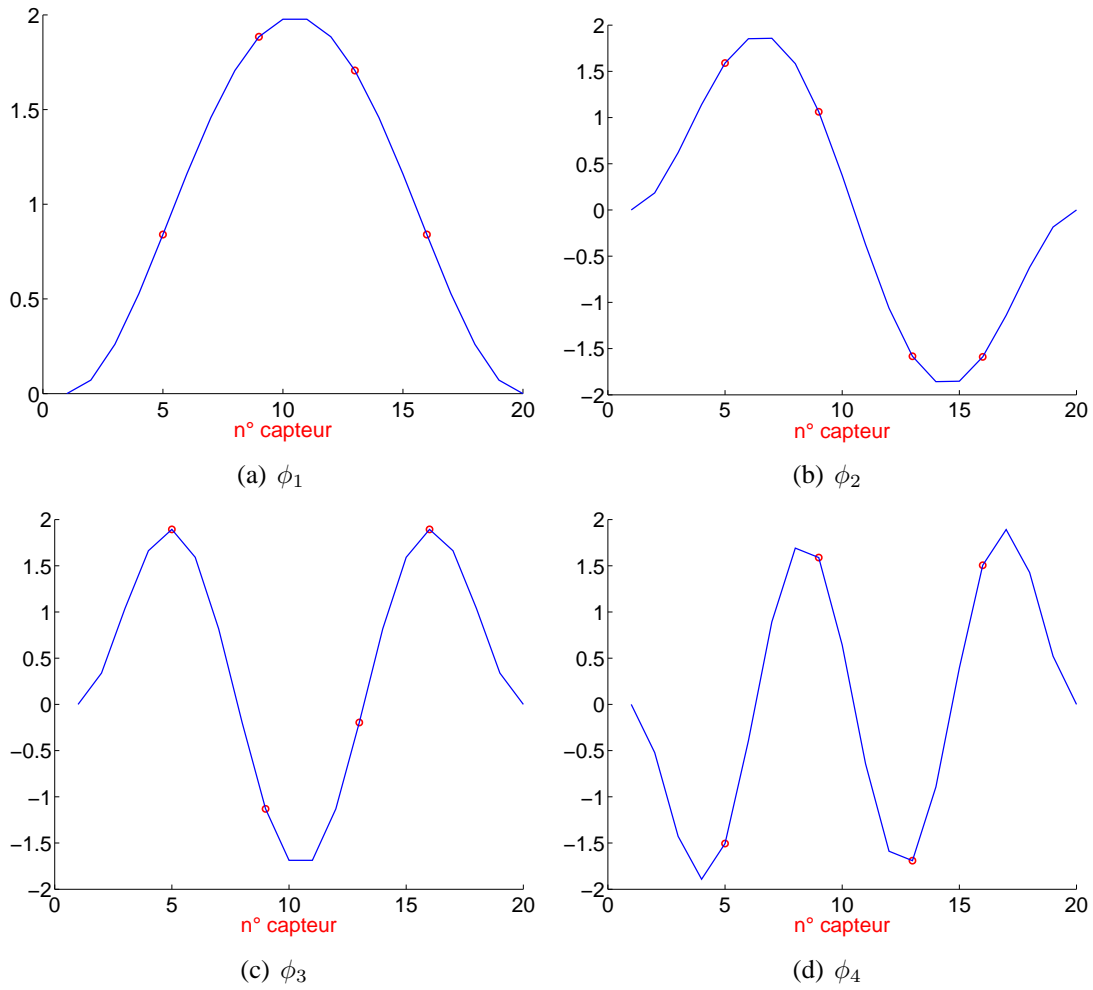


FIGURE 4.49 – Déformées modales de la poutre E-E avec les capteurs n° 5, 9, 13 et 16 choisis par la EI. Les points en rouge indiquent les positions optimales.

### 4.9.2 Application de la fonction de type 1

Selon la fonction de type 1, on peut calculer la valeur de la fonction objectif avec diverses combinaisons. Comme cette méthode utilise toutes les combinaisons possibles de placement des capteurs, elle est gourmande en temps de calcul. Pour cela nous avons réduit le nombre de capteurs initial à 11. Par exemple, s'il faut enlever 5 capteurs parmi les 11, il y a alors  $\frac{11!}{(11-5)!5!} = \frac{11!}{6!5!} = 462$  combinaisons à examiner. La fonction  $f_1$  devient minimale lorsque les capteurs aux nœuds 1, 3, 6, 9 et 11 sont éliminés. La combinaison optimale est obtenue pour une valeur de la fonction objectif égale à 0.184.

Les déformées modales pour ce cas sont présentées sur la figure 4.50. Les points en rouge indiquent les positions optimales.

### 4.9.3 Cas des ELB

Dans ce paragraphe, nous avons appliqué la méthode précédente, utilisant la fonction objectif de type 1, pour obtenir le placement optimal des capteurs longue base. La formule de  $f_1$  est alors modifiée

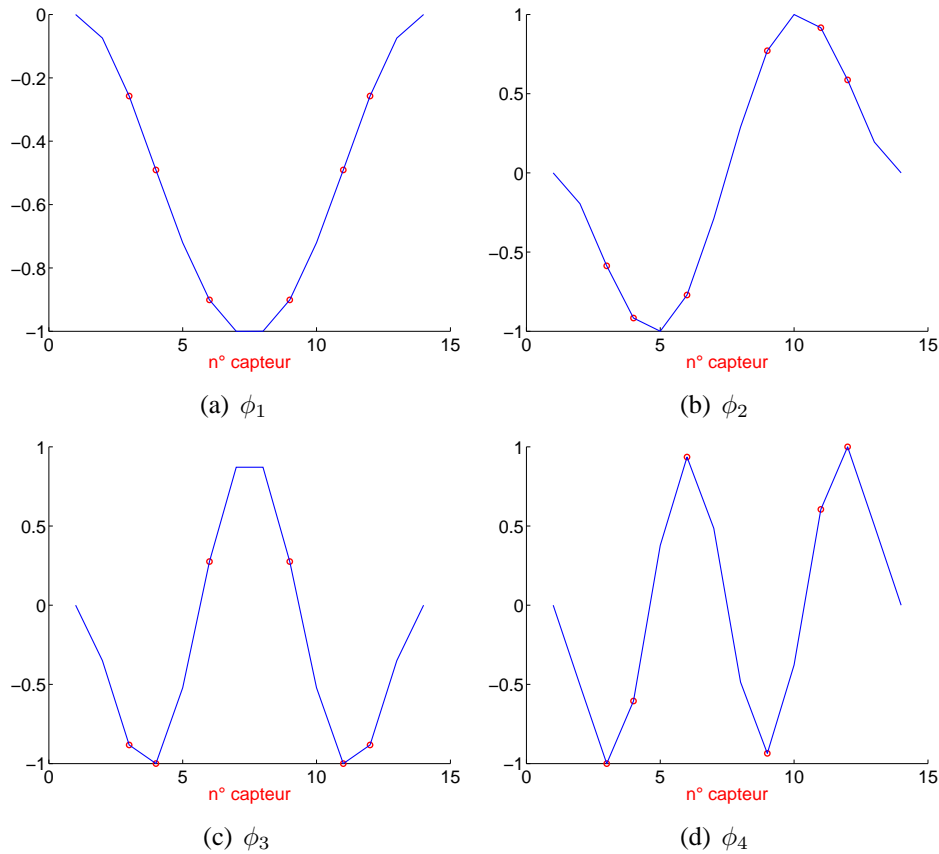


FIGURE 4.50 – Déformées modales de la poutre E-E après élimination des capteurs 1, 3, 6, 9 et 11 choisis par la fonction  $f_1$ . Les points en rouge indiquent les positions optimales.

en remplaçant les déformées modales  $\phi_k$  des capteurs ponctuels par les déformées modales provenant d'une série d'ELB. La configuration initiale est composée de 20 ELB placés de manière continue entre les nœuds du maillage EF. Nous étudions ici la similarité entre les intégrales de courbures modales de la poutre E-E. Les déformées modales dans ce cas sont présentées sur la figure 4.51.

### 4.9.4 Comparaison Fonction objectif/EI

Afin de comparer les deux techniques utilisées pour le placement des capteurs, nous avons appliqué l'EI pour la même configuration. Nous souhaitons placer 6 capteurs parmi 11 points de mesures. La procédure fondée sur l'EI élimine dans ce cas les capteurs 1, 2, 4, 10 et 11. La figure 4.52 montre les déformées modales obtenues.

On voit que les deux techniques ne fournissent pas le même résultat. Il convient à ce stade de noter qu'une bonne méthode pour le placement de capteurs pour une application particulière ne l'est pas nécessairement pour une autre.

### 4.9.5 Nombre optimal de capteurs selon Sazonov et al. [15]

Nous supposons ici que le nombre de capteurs initial utilisé est égal à 20 et qu'ils sont régulièrement répartis le long de la poutre de longueur  $L=705 \text{ mm}$ . L'objectif est d'évaluer si ce nombre de capteurs est suffisant selon Sazonov et al. [15] afin d'étudier les quatre premiers modes.



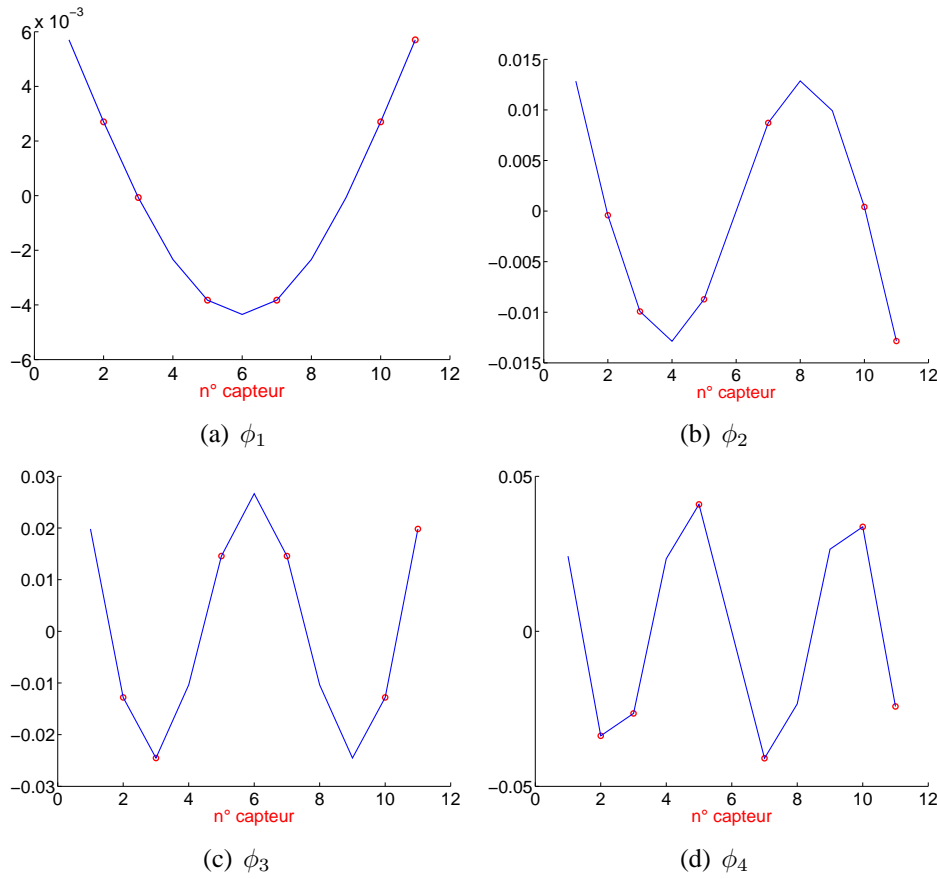


FIGURE 4.51 – Déformées modales de la poutre E-E obtenus par des ELB, après élimination des capteurs 1, 4, 6, 8 et 9 en utilisant la fonction  $f_1$ . Les points en rouge indiquent les positions optimales.

La détermination de la résolution spatiale optimale dépend du bruit de mesure, comme le montre l'équation définie dans le Chapitre 3 :

$$h_{opt} = \sqrt[4]{\varepsilon F_4} \quad (4.16)$$

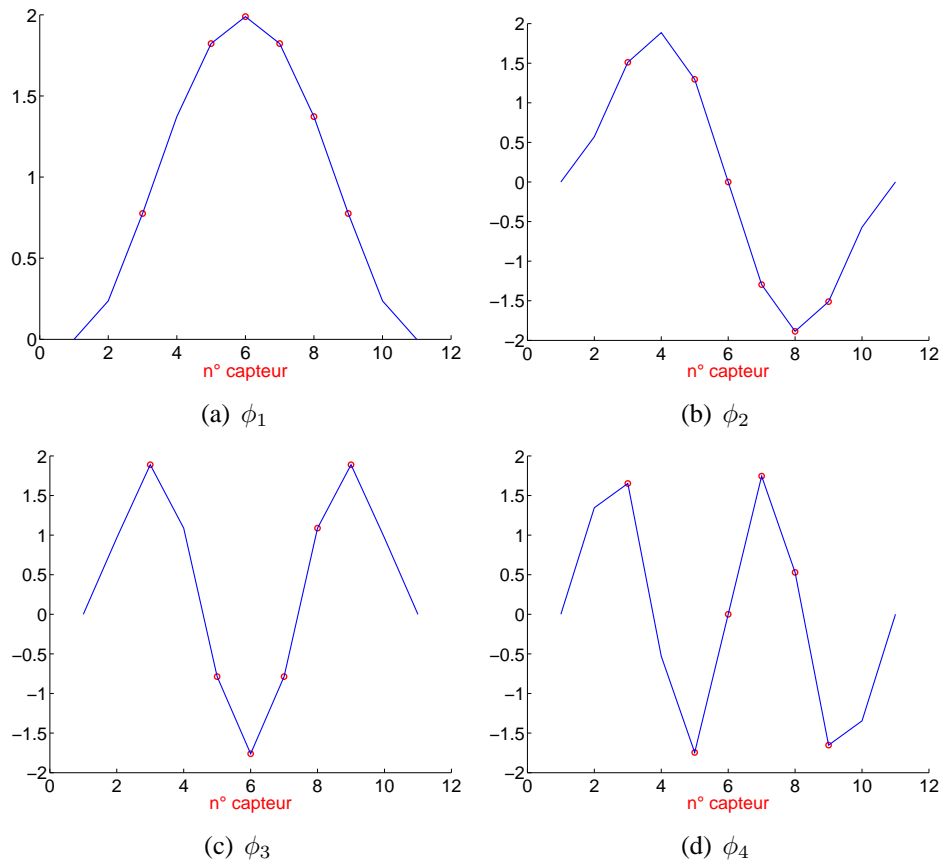
Les valeurs de  $F_4$  se trouvent dans le tableau 3.1 pour le cas d'une poutre E-E et nous supposons  $\varepsilon$  égal à 2%.

L'intervalle de résolution spatial recommandé par Sazonov  $\left[\frac{1}{h_{max}} \quad \frac{1}{h_{min}}\right]$  est exprimé dans les expressions (3.20) et (3.20).

Les résultat est répertorié dans le tableau 4.6.

#### 4.9.6 Placement optimal dans la détection d'endommagement

Nous allons maintenant appliquer deux méthodes de détection d'endommagement sur le modèle numérique de la poutre E-E entaillée : la méthode des courbures modales et la méthode fondée sur l'énergie de déformation modale. La poutre EF est discrétisée en 100 éléments et le défaut est situé sur l'élément 56 donc à l'abscisse  $x_0=391 \text{ mm}$ . Tout d'abord, nous prenons un nombre de capteurs ponctuels (accéléromètres) égal à 11, ce qui est le cas de la poutre expérimentale qui sera étudiée ultérieurement, puis égal à 20. Nous souhaitons placer ces capteurs de manière optimale sur la poutre



**FIGURE 4.52 – Déformées modales de la poutre E-E obtenus par des capteurs ponctuels, après élimination des capteurs 1, 2, 8, 10 et 11 en utilisant la EI. Les points en rouge indiquent les positions optimales.**

E-E afin de détecter l'endommagement. Par ailleurs, nous nous intéresserons seulement au quatre premiers modes.

Trois configurations de placement de capteurs sont utilisées. La première est celle utilisant la fonction objectif de type 1 ( $f_1$ ) et est notée « Config.  $f_1$  », la seconde est celle utilisant l'« EI » et est notée « Config. EI », et la troisième est celle des capteurs régulièrement espacés le long de la poutre et est notée « Config. 1 ».

L'optimisation à l'aide de la fonction  $f_1$  partant de 14 capteurs capteurs ponctuels. Le tableau 4.7 reporte les abscisses des capteurs pour les trois configurations.

	1 mode	2 modes	3 modes	4 modes
$h_{opt}$ (mm)	148	89	64	49
$n_{opt} = \frac{L}{h_{opt}}$	5	8	12	15
$\left[ \frac{1}{h_{max}} \quad \frac{1}{h_{min}} \right]$	[2 15]	[3 24]	[4 34]	[5 43]

**TABEAU 4.6 – Résolution spatiale optimale, nombre de capteurs optimal correspondant et intervalle de résolution spatiale pour chacun des modes**

	$x(mm)$		
	Config.1	Config. $f_1$	Config.EI
$n^o 1$	0	54.23	108.46
$n^o 2$	70.50	108.46	162.69
$n^o 3$	141	162.69	216.92
$n^o 4$	211.5	216.92	271.15
$n^o 5$	282	271.15	325.38
$n^o 6$	352.5	325.38	379.62
$n^o 7$	423	379.62	433.85
$n^o 8$	493.50	488.07	488.08
$n^o 9$	564	542.31	542.31
$n^o 10$	634.50	596.53	596.54
$n^o 11$	705	650.77	650.77

TABLEAU 4.7 – Placement des capteurs ponctuels sur la poutre E-E

Les graphes des figures 4.53 et 4.54 montrent les résultats de détection d'endommagement obtenus à partir des différentes configurations.

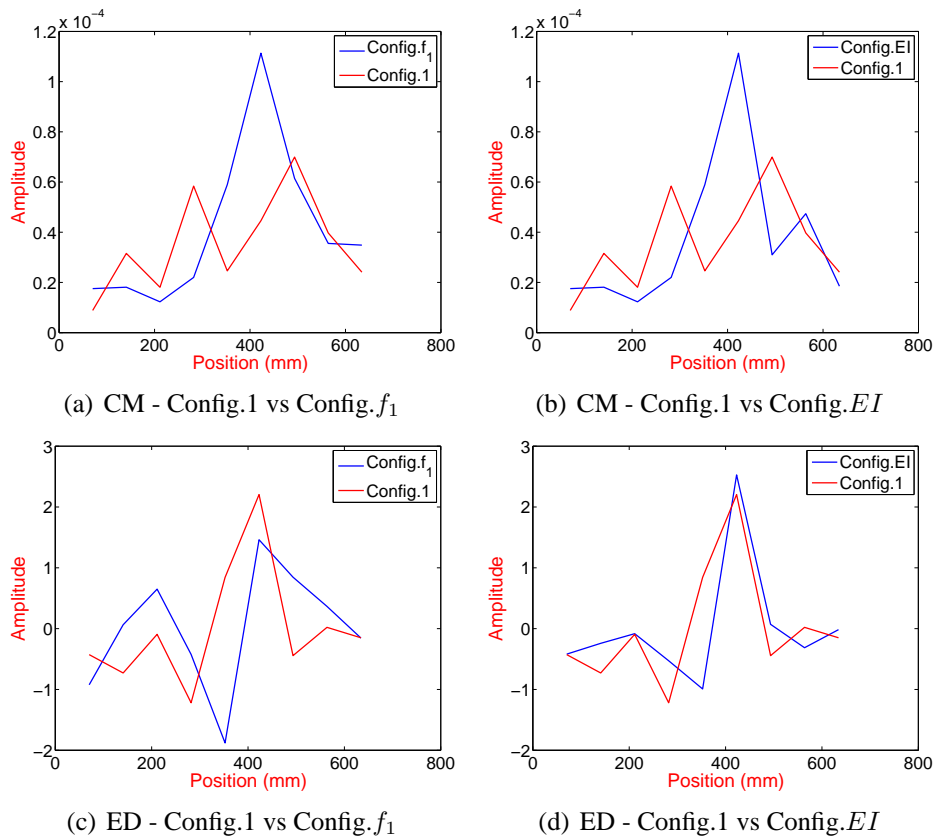


FIGURE 4.53 – Méthodes de détection d'endommagement pour 11 capteurs

Les résultats montrent que les deux méthodes utilisées pour le placement optimal des capteurs permettent d'améliorer la détection et la localisation du défaut par rapport à la configuration uniforme qui est classiquement utilisée.

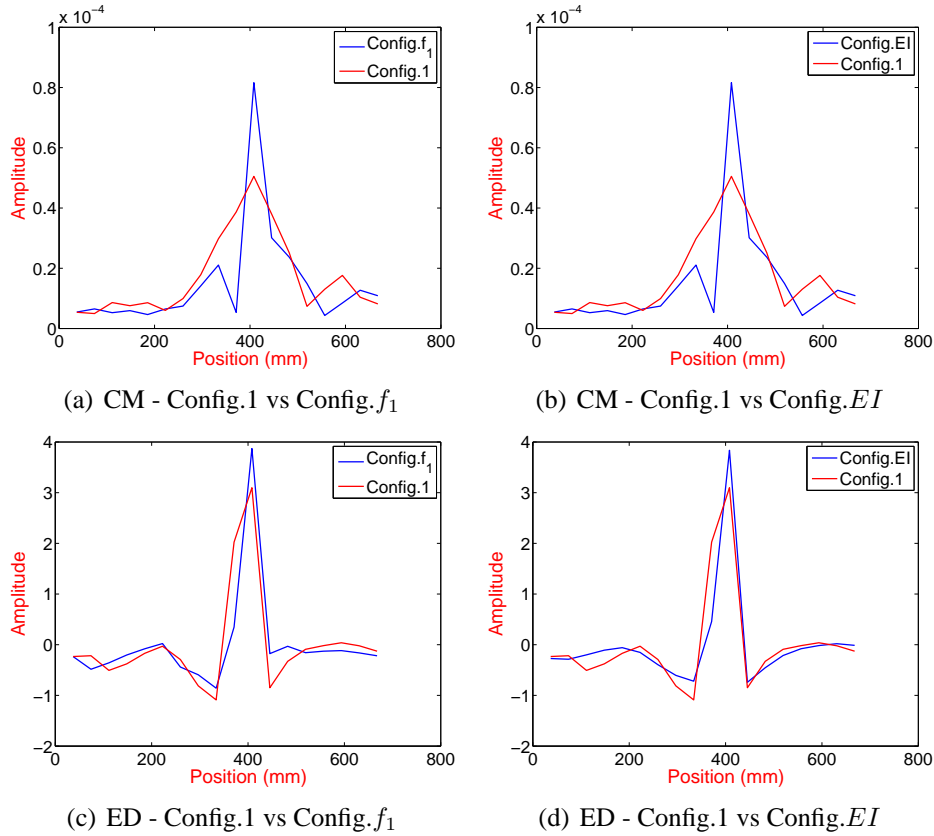


FIGURE 4.54 – Méthodes de détection d'endommagement pour 20 capteurs

## 4.10 Conclusion

Dans la première partie du Chapitre, les capacités des différents types de capteurs à détecter et localiser un endommagement ont été étudiées par des simulations numériques. Nous avons mis en avant le fait que les déformées modales obtenues à partir de la mesure d'ELB ne sont pas les mêmes que celles obtenues à partir des capteurs ponctuels classiques. En effet, ces derniers permettent d'obtenir les déformées modales  $\phi_k(x)$ , tandis qu'à partir des ELB l'intégrale de la courbure modale entre les bornes du capteur  $\int_a^b \phi_k''(x)$  est obtenue [10].

L'efficacité de différentes méthodes, utilisant les paramètres modaux déterminés numériquement, a été étudié en fonction du type de capteurs utilisé, du nombre de capteurs, de la sévérité du défaut et du bruit de mesure ajouté. Nous avons trouvé que les capteurs longue base (ELB) permettent d'obtenir de meilleurs résultats que les capteurs ponctuels, notamment au niveau de la localisation de l'endommagement. En effet, nous avons remarqué que pour les méthodes nécessitant des intégrations et des dérivations numériques (courbure de flexibilité et énergie de déformation), les erreurs sont plus importantes et, par suite, les résultats sont moins bons surtout lorsque le nombre de capteurs est faible. L'ajout de bruit sur les déformées modales a permis de visualiser l'impact que peuvent avoir les dispersions des mesures expérimentales sur les résultats obtenus pour les différentes méthodes d'endommagement. Nous avons trouvé qu'avec 2% de « bruit » (variance) additif, la détection et la localisation à partir des capteurs ponctuels sont perturbées et ne sont plus efficaces, tandis qu'avec les ELB la localisation est toujours possible.

Deux méthodes particulières ont été étudiées, la courbure de TF et le filtrage modal. La courbure de TF a montré une efficacité très intéressante pour localiser le défaut, à condition que la bande de fréquences soit judicieusement choisie. La méthode fondée sur le filtrage modal est capable de détecter un endommagement sans avoir recours à une identification modale. Des pics apparaissent sur le spectre filtré mais il s'agit ensuite de bien différencier les modifications physiques des modifications environnementales qu'une structure peut subir.

Afin d'estimer l'erreur associée à la méthode de détection retenue pour le SHM, des probabilités de détection de l'endommagement ont été calculées par simulations de Monte-Carlo. Pour des déformées modales bruitées et des défauts de faible valeur, les ELB sont plus aptes à localiser le défaut que les autres types de capteurs. Il reste cependant à quantifier la précision de ces résultats concernant la manière d'ajouter le bruit dans le modèle numérique. Il serait par exemple plus réaliste de l'ajouter au niveau des signaux temporels.

Dans la dernière partie du Chapitre, nous avons vu tout d'abord que la détermination du placement optimal des capteurs pour les mesures de vibrations et le SHM est utile afin d'améliorer la précision des résultats. Nous avons ensuite présenté quelques méthodes de placement optimal. Une méthode simple et efficace, basée sur le calcul de fonctions objectif pour le positionnement des capteurs, a été appliquée numériquement sur la poutre E-E. Nous avons ainsi pu observer, comme déjà démontré dans [14], que la méthode permet de fournir une configuration optimale du placement des capteurs ponctuels et des ELB. Nous avons également appliqué deux méthodes de placement de capteurs afin d'étudier leur effet sur la détection d'endommagement à partir des méthodes des courbures modales et de l'indicateur d'endommagement. Les simulations ont montrées que l'optimisation du placement des capteurs permettait de gagner en efficacité pour localiser un endommagement. Il aurait été intéressant de tester d'autres méthodes et d'étudier leur effet sur les résultats obtenus pour d'autres méthodes de détection d'endommagement, ce qui n'a pu être fait dans cette thèse faute de temps.

# Bibliographie

- [1] Narkis Y., *Identification of crack location in vibrating simply supported beams*, Journal of Sound and Vibration, 172(4), pp. 549-558, 1994.
- [2] Sinou J.-J., Lees A.W., *Influence of cracks in rotating shafts*, Journal of Sound and Vibration, 285(4-5), pp. 1015-1037, 2005.
- [3] Wahab A., Roeck G., *Damage detection in bridges using modal curvatures : application to a real damage scenario*, Journal of Sound and Vibration, 226, pp. 217-235, 1999.
- [4] Alampalli S., Fu G., Dillon E.W., *On the use of measured vibration for detecting bridge damage*, Proceedings of the 4th International Bridge Engineering Conference, pp. 125-137, 1995.
- [5] Alvandi, A., *Contribution à l'utilisation pratique de l'évaluation dynamique pour la détection d'endommagements dans les ponts*, Thèse, ENPC, 2003.
- [6] Park H., Jung H.S., Kwon Y.H., Seo J.H., *Mathematical models for assessment of the safety of steel beams based on average strains from long gage optic sensors*, Sensors and Actuators A : Physical, 125(2), pp.109-113, 2006.
- [7] Rytter A., *Vibration based inspection of civil engineering structures*, Thèse, Aalborg University (Fracture and Dynamics, No. 44, Vol. R9314), 1993.
- [8] Sampaio R.P.C., Maia N.M.M., Silva J.M.M., *Damage detection using the frequency-response-function curvature method*, Journal of Sound and Vibration, 226(5), pp. 1029-1042, 1999.
- [9] Lopez-Caballero F., *Probabilité et méthodes de fiabilité utilisées en géotechnique*, Cours, Ecole Centrale Paris.
- [10] Cumunel G., *Extensomètres à fibre optique Longue Base (ELB) pour l'évaluation dynamique des structures*, Thèse, ENPC, 2008.
- [11] Deraemaeker A., Preumont A., *Vibration based damage detection using large array sensors and spatial filters*, Mechanical Systems and Signal Processing, 20(7), pp. 1615-1630, 2006.
- [12] Ewins D.J., *Modal Testing : Theory, Practice, and Application*, Research Studies Press, 2000.
- [13] Friswell M.I., Mottershead J.E., *Finite Element Model Updating in Structural Dynamics* Kluwer Academic Publishers, 1995.
- [14] Li Z.N., Tang J., *Optimal sensor locations for structural vibration measurements*, Applied Acoustics, 65(8), pp. 807-818, 2004.

- [15] Sazonov E., Klinkhachorn P., *Optimal spatial sampling interval for damage detection by curvature or strain energy mode shapes*, Journal of Sound and Vibration, 285(4-5), pp. 783-801, 2004.

## Chapitre 5

# Nouvelles méthodes de détection d'endommagement

---

**C**<sup>E</sup> CHAPITRE est consacré à la présentation et l'utilisation des deux techniques de détection d'endommagements développées dans l'équipe Dynamique et appliquées dans la thèse de T.T.H. Le [1]. La première méthode est fondée sur la Décomposition en Valeurs Singulières (SVD) appliquée sur une suite de données modales collectées. La seconde est fondée sur l'estimation analytique des variations relatives des fréquences propres en fonction des modifications physiques de la structure. Dans un premier temps, des rappels sont effectués afin de mieux appréhender le principe des méthodes. Puis, nous testons ces techniques sur des données numériques d'un modèle EF de poutre E-E endommagée (entaille) afin de vérifier leur efficacité. Enfin les améliorations apportées sont présentées et les conclusions seront dégagées.

---



**Plan du Chapitre 5**

---

<b>5.1</b>	<b>Méthode fondée sur la SVD . . . . .</b>	<b>107</b>
5.1.1	Définition de la SVD . . . . .	107
5.1.2	Identification modale par la SVD . . . . .	107
5.1.3	Technique de détection de défaut par la SVD . . . . .	107
5.1.4	Application sur des données numériques pour une poutre E-E . . . . .	109
<b>5.2</b>	<b>Méthode fondée sur les variations relatives des fréquences . . . . .</b>	<b>118</b>
5.2.1	Estimation analytique de la variation des paramètres modaux . . . . .	118
5.2.2	Localisation pour une poutre avec $\Delta\mu(x)$ et $\Delta EI(x)$ . . . . .	120
5.2.3	Localisation pour une poutre avec $\Delta T$ , $\Delta\mu(x)$ et $\Delta EI(x)$ . . . . .	122
5.2.4	Application sur des données numériques de la poutre E-E . . . . .	123
<b>5.3</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>133</b>
	<b>Bibliographie . . . . .</b>	<b>134</b>

---

## 5.1 Méthode fondée sur la SVD

### 5.1.1 Définition de la SVD

Le procédé d'algèbre linéaire de décomposition en valeurs singulières d'une matrice (ou SVD de l'anglais : Singular Value Décomposition) est un outil important de factorisation des matrices rectangulaires réelles ou complexes. Ses applications s'étendent du traitement du signal aux statistiques. Une matrice quelconque  $A$  de taille  $n \times m$  admet une décomposition de la forme :

$$A = U\Sigma V^T$$

où  $U$  et  $V$  sont des matrices orthogonales d'ordre respectif  $n$  et  $m$ ,  $\Sigma$  une matrice diagonale de taille  $n \times m$  contenant les éléments  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_r$  appelées valeurs singulières de  $A$  (et de  $A^T$ ), telles que  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 > \dots > \sigma_r$  où  $r = \min(m, n)$ . Le rang  $r$  de  $A$  est égal au nombre de valeurs singulières strictement positives. Les colonnes de  $V$  et de  $U$  forment respectivement les vecteurs singuliers droits et gauches de  $A$ . Puisque les valeurs singulières sont rangées généralement par ordre décroissant, l'indice  $i$  correspondant est appelé ordre de la valeur singulière.

Une interprétation géométrique est donnée par D. Kalman [2] et M. Bergmann [3]. La matrice  $A$  de dimension  $n \times m$  peut être considérée comme une collection de coordonnées de  $m$  points  $P_1, P_2, \dots, P_m$  dans un espace vectoriel de dimension  $n$ . Quel que soit  $k \leq n$ , on cherche une base du sous-espace de dimension  $k$  tel que la distance quadratique moyenne de l'ensemble de ces points à ce sous-espace soit minimisé autrement dit que  $\sum_{i=1}^k |H_i P_i|^2$  soit minimisée où  $H_i$  est la projection orthogonale du point  $P_i$  sur le sous-espace. Le sous-espace désiré est l'espace créé par les  $k$  premiers vecteurs singuliers à gauche de la matrice  $A$ .

### 5.1.2 Identification modale par la SVD

La décomposition en valeurs singulières des signaux de réponse d'une structure soumise à une excitation délivrée par un ensemble de capteurs sera de la forme :

$$R = U\Sigma V^T \quad (5.1)$$

où  $R$  peut être composé de signaux de déplacement, de vitesse, d'accélération ou de déformation. Dans ce cas, les vecteurs singuliers droits vont représenter les modes propres de la structure excitée et les vecteurs singuliers gauches obtenus sont les composantes temporelles associées. Les valeurs singulières de la diagonale de  $\Sigma$  constituent les valeurs propres.

### 5.1.3 Technique de détection de défaut par la SVD

Une nouvelle méthode de détection a été présentée dans la thèse de T.T.H. Le à l'ENPC [1] fondée sur la SVD. L'idée de cette technique est d'appliquer la SVD sur une matrice  $A$  (Eq :5.2) représentant

une collection de données acquises à différents instants de la vie de la structure. Chaque état de la structure est en général représenté par ses fréquences et ses modes propres.

$$A = U\Sigma V^T \quad (5.2)$$

La matrice  $A$  est de taille  $n \times m$  avec  $m$  représentant le nombre d'essais (autrement dit le nombre d'échantillons sur une échelle de temps donnée) et  $n$  la dimension des données modales choisies. Par exemple pour la matrice des valeurs propres,  $n$  est le nombre de valeurs propres utilisées et pour la matrice des déformées modales,  $n$  est le nombre de points de discrétisation de la déformée modale (autrement dit le nombre de points de mesure ou de capteurs).

La SVD est appliquée sur la matrice  $A$  (fréquences propres ou déformées modales). Des vecteurs singuliers gauches et droits, et des valeurs singulières sont alors obtenus. Le premier vecteur singulier à gauche représente la "tendance principale" ou tendance globale des vecteurs colonnes de la matrice  $A$ . Les autres vecteurs singuliers à gauche représentent des "tendances secondaires" ou tendance de la différence des états.

La première valeur singulière  $\sigma_1$  et les suivantes  $\sigma_2, \sigma_3, \dots$  représentent respectivement l'importance de la tendance principale et des tendances secondaires (en général  $\sigma_1 \gg \sigma_2, \sigma_3$ ). Le premier vecteur singulier à gauche représente la tendance principale de la collection des données d'une suite d'essais. Le premier vecteur singulier à droite représente l'amplitude associée à la tendance principale et cette amplitude est fonction des essais (ou fonction du temps au cours de la vie de la structure). Les autres vecteurs singuliers à droite représentent l'amplitude associée aux tendances secondaires.

Pour détecter l'endommagement dans le temps, il s'agit d'utiliser les vecteurs singuliers à droite (de la matrice des valeurs propres et de la matrice des déformées modales). Il suffit d'observer l'amplitude en fonction du temps associée aux tendances secondaires de la matrice des valeurs propres ou de la matrice des déformées modales. Souvent, il est possible de détecter l'instant où l'endommagement se produit grâce à une forte variation (un saut ou une chute de la courbe de ces vecteurs en fonction du temps).

Dans [1], l'auteur a appliqué la technique sur une collection de paramètres modaux d'un câble monoton calculés par EF puis sur des données expérimentales d'un câble (540 essais : 180 pour l'état sain et 360 pour les états endommagés). La figure 5.1 montre un exemple de courbe, l'endommagement apparaît pour l'essai numéro 180.

Cependant, pour localiser l'endommagement, les vecteurs singuliers à gauche (hormis le premier) de la matrice des déformées modales sont utilisés. Autrement dit, nous observons les tendances secondaires de la collection des déformées modales d'un mode. Souvent, le défaut peut être localisé grâce à un maximum ou un minimum de la courbe situé à l'endroit du défaut.

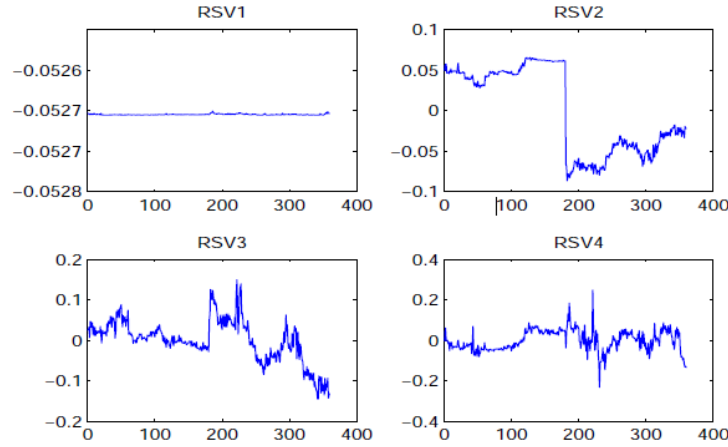


FIGURE 5.1 – RSV (Right Singular Values) de la collection du quatrième mode propre [1]

#### 5.1.4 Application sur des données numériques pour une poutre E-E

Dans un premier temps, l'efficacité de cette technique est évaluée sur des collections de données modales générées à partir d'un modèle numérique de la poutre E-E, qui a été présenté dans le Chapitre 4. Les caractéristiques de la poutre sont répertoriées dans le tableau 5.1. La poutre est discrétisée en 100 éléments donc 101 nœuds.

<b>Longueur (<math>mm</math>)</b>	705
<b>Largeur (<math>mm</math>)</b>	40
<b>Epaisseur (<math>mm</math>)</b>	8.1
<b>Section (<math>mm^2</math>)</b>	324
<b>Inertie (<math>mm^4</math>)</b>	1771.5
<b>Module d'Young (<math>N/m^2</math>)</b>	$61.7 \cdot 10^9$
<b>Masse volumique (<math>kg/m^3</math>)</b>	2791

TABLEAU 5.1 – Caractéristiques de la poutre E-E

L'objectif dans un premier temps est de valider les résultats de détection et de localisation obtenus dans la thèse [1]. En second temps, nous nous intéressons à l'application de la méthode sur des collections de courbures modales obtenues par la différence finie centrée des capteurs ponctuels. Puis, elle sera appliquée sur des collections de vecteurs propres obtenus par des capteurs longue base (ELB) afin de vérifier si les résultats s'améliorent. Enfin, nous testons la sensibilité de cette méthode par rapport au nombre de simulations générées pour chacun des deux états (sain et endommagé) afin d'évaluer l'influence du nombre d'essais réalisés expérimentalement.

Nous notons  $\phi_k^{(j)}$  le  $k^{\text{ème}}$  mode propre de l'essai  $n^o j$ . La matrice des déformées modales pour  $m$  essais notée par  $A_{\phi_k}$  est définie comme suit :

$$A_{\phi_k} = [\phi_k^{(1)} \phi_k^{(2)} \dots \phi_k^{(m)}] \quad (5.3)$$

Nous effectuons 200 simulations numériques afin d'obtenir une collection de paramètres modaux pour la poutre E-E intacte. Ici, les perturbations climatiques et l'effet du bruit de mesure que la poutre

peut subir sont simulés par un ajout de bruit numérique sur les déformées modales et les fréquences propres. Ce bruit est modélisé pour chaque mode  $k$  par une variable aléatoire de moyenne  $\sigma$  nulle et d'écart-type  $\Delta\sigma$  égale à 0.5% (Eq. (5.5)).

Le mode propre de la poutre à l'essai  $n^\circ j$  ( $j = 1, 2, \dots, 200$ ) s'écrit donc comme suit :

$$\phi_k^{(j)} = \phi_k^{(j)}(1 + \varepsilon_k) \quad (5.4)$$

Pour une moyenne de 0.5%

$$\varepsilon_k = \sigma + \Delta\sigma \cdot \varepsilon \quad (5.5)$$

$\varepsilon$  étant une variable aléatoire comprise entre 0 et 1. A partir de l'essai  $j_0 = 201$ , un défaut est simulé. L'endommagement est représenté comme dans les applications des méthodes précédentes, par une réduction de section. Ici nous avons choisi l'élément 56 comme endommagé ( $x_d = [391mm398mm]$ ) et le défaut est modélisé par une faible perte locale de rigidité  $\frac{\Delta EI}{EI} = 3\%$ , induite par une diminution de la largeur de la poutre. De nouvelles simulations ( $n^\circ 201$  à  $n^\circ 400$ ) sont alors effectuées. Pour chaque réalisation, les déformées modales et les fréquences propres sont identifiées par la résolution du problème aux valeurs propres à partir des matrices de masse et de raideur de la poutre. Pour étudier l'influence du bruit, 200 simulations bruitées et non bruitées sont réalisées pour l'état sain et l'état endommagé.

L'évolution des quatre premières fréquences propres pour 400 essais (200 états sains et 200 états endommagés) est présentée sur la figure 5.2 .

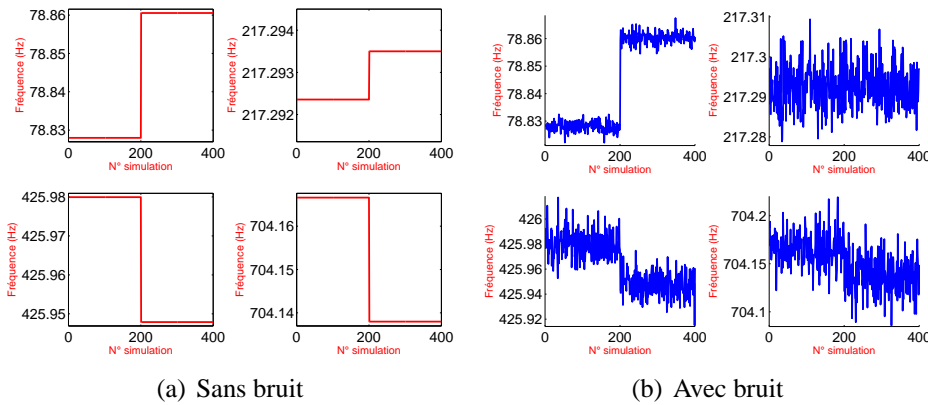


FIGURE 5.2 – Evolution des quatre premières fréquences (état sain et état endommagé) avec et sans bruit ajouté

En observant les fréquences propres directement on ne peut pas savoir l'instant où apparaît le défaut lorsque celles-ci sont bruitées. Si on trace les déformées modales des 400 réalisations (Fig. 5.3), elles sont toutes parfaitement superposées, et l'endommagement ne peut pas être ni détecté, ni localisé.

#### 5.1.4.1 Application de la SVD sur la matrice des modes propres

Nous allons maintenant appliquer la SVD sur la matrice des déformées modales. Pour alléger le manuscrit, nous avons juste présenté les résultats de l'application de la SVD sur les collections du 1<sup>er</sup> et du 2<sup>ème</sup> mode propre.

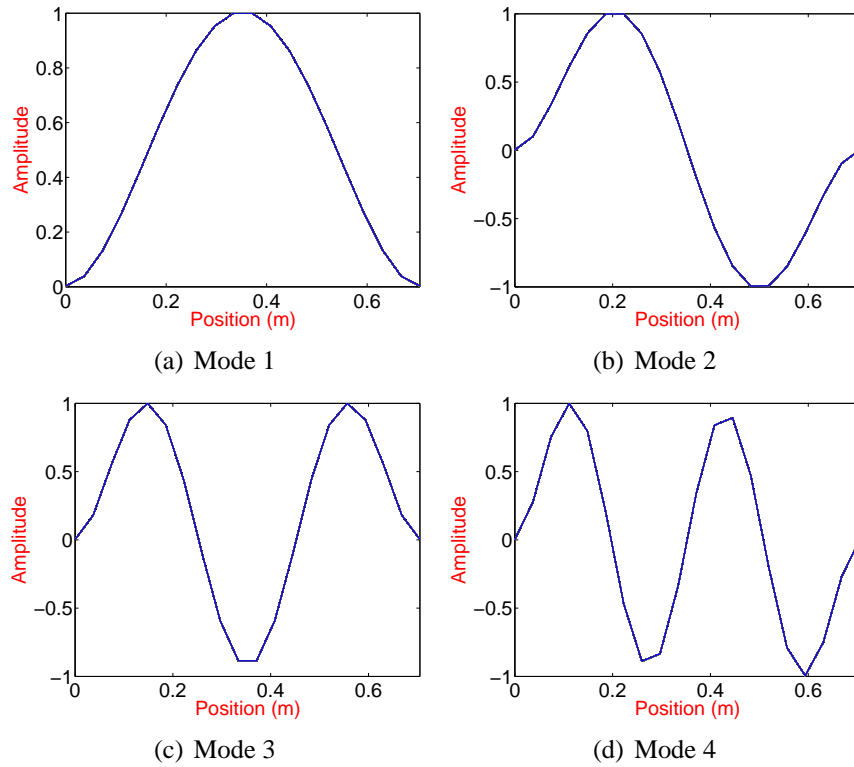


FIGURE 5.3 – Quatre premiers modes propres pour 400 simulations (état sain et état endommagé).

Les vecteurs singuliers à droite de la matrice formée des collections des déformées modales avec et sans bruit sont tracés simultanément sur les graphes de la figure 5.4. En observant, les vecteurs tracés en rouge qui représentent les données non bruitées, nous pouvons détecter le défaut en temps. Un saut apparaît pour les deux premiers vecteurs singuliers droits à l'essai  $n^{\circ}$  201. Lorsque les données sont bruitées, le saut est plus faible c'est-à-dire que la distance verticale séparant les essais sains des essais endommagés devient moins visible. En analysant l'évolution des vecteurs singuliers à gauche de cette matrice (Fig. 5.5), nous pouvons localiser l'endommagement : un pic apparaît à l'abscisse  $x_d \approx 390mm$  sur le 2<sup>ème</sup> vecteur singulier. Les premiers vecteurs donnent la tendance des déformées modales correspondantes.

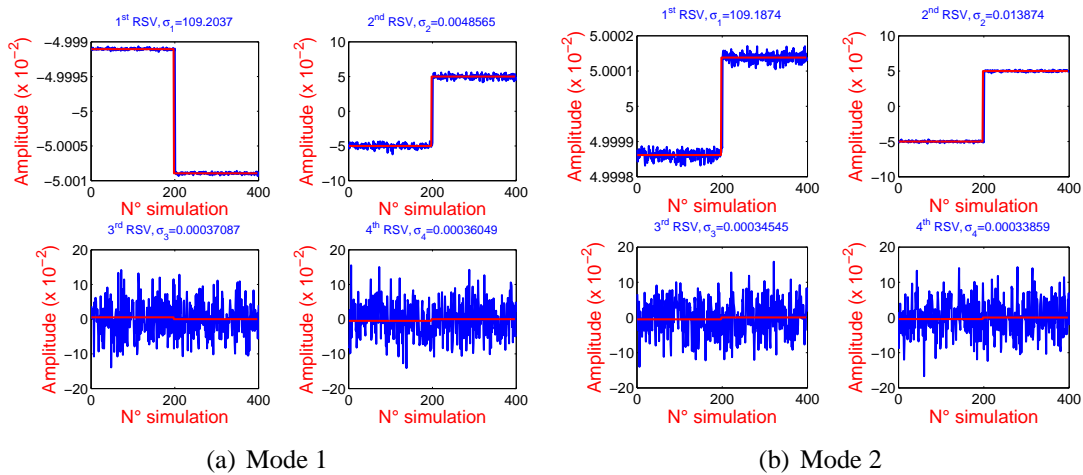


FIGURE 5.4 – Quatre premiers vecteurs droits de la matrice des deux premières déformées modales. Les courbes rouges indiquent les cas non bruités.

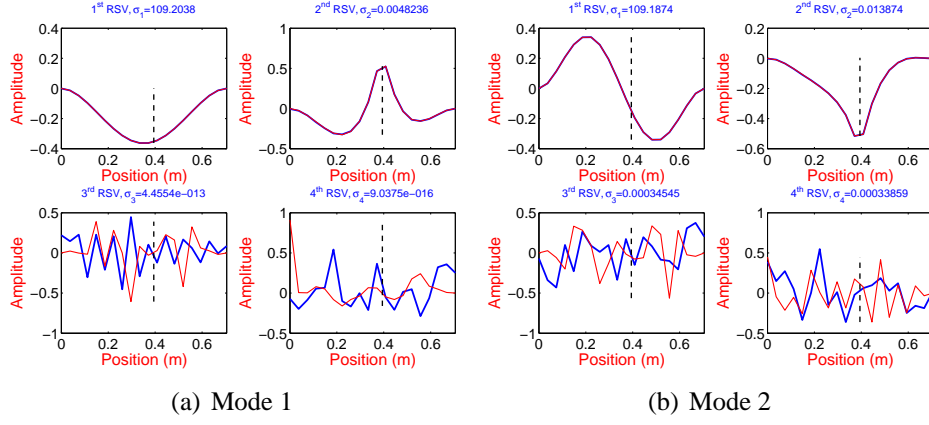


FIGURE 5.5 – Quatre premiers vecteurs gauches de la matrice des deux premières déformées modales. Les courbes rouges indiquent les cas non bruités.

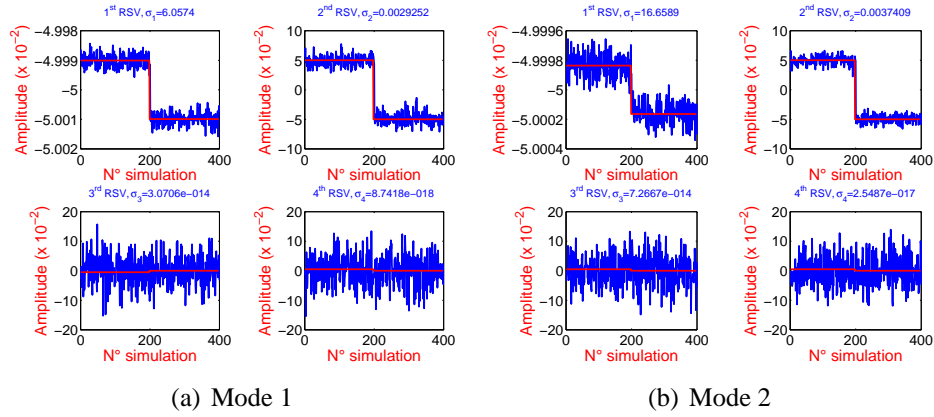


FIGURE 5.6 – Quatre premiers vecteurs droits de la matrice des deux premières courbures modales. Les courbes rouges indiquent les cas non bruités.

#### 5.1.4.2 Application de la SVD sur la matrice des courbures modales

Maintenant nous allons tester la méthode sur la matrice des courbures modales, obtenues par la différence finie centrée des déformées modales bruitées et non bruitées fournies par les capteurs ponctuels (Eq. (2.11)). Sur la figure 5.6, nous remarquons qu'en présence du bruit le saut n'est plus visible entre les essais à l'état sain et les essais à l'état endommagé. Par contre, on remarque que l'élément endommagé est mieux localisé qu'avec les déformées modales (Fig. (5.7)), comme déjà démontré par la méthode fondée sur la différence de courbure modale entre un état sain et un état endommagé, les erreurs de dérivation numérique amplifient les dispersions et handicapent la localisation, comme le montre le 4<sup>ème</sup> vecteur singulier droit (Fig. 5.7(b)).

#### 5.1.4.3 Application de la SVD sur les vecteurs propres des ELB

Nous allons maintenant appliquer la SVD sur une collection des intégrales de courbures modales mesurées directement par des ELB. Sur la figure 5.8, un saut bien net apparaît à partir de l'essai n° 201, sans et avec bruit ajouté. On voit également sur la figure 5.9 que la localisation en espace du défaut est plus précise dans le cas des courbures modales, surtout lorsque les données sont bruitées.

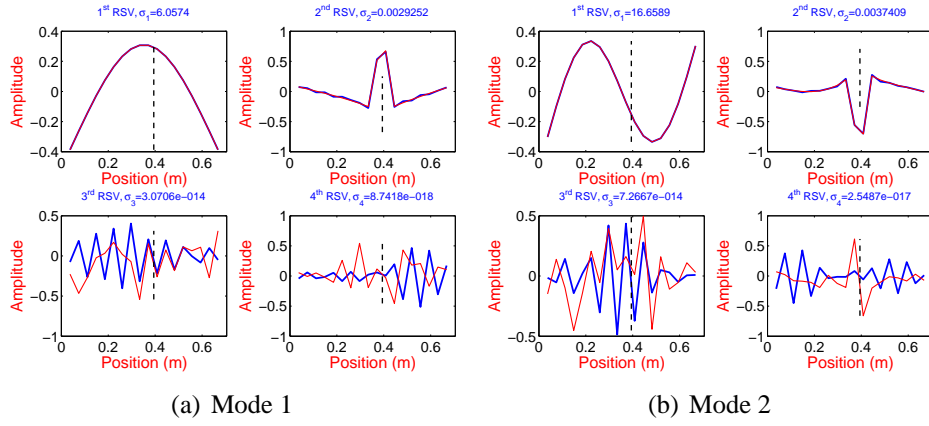


FIGURE 5.7 – Quatre premiers vecteurs gauches de la matrice des deux premières courbures modales. Les courbes rouges indiquent les cas non bruités.

Ceci revient au fait qu'un ELB mesure directement les courbures [8] alors qu'un capteur ponctuel classique nécessite des dérivations numériques pour aboutir à la courbure modale, ce qui augmente les erreurs lorsqu'il y a du bruit.

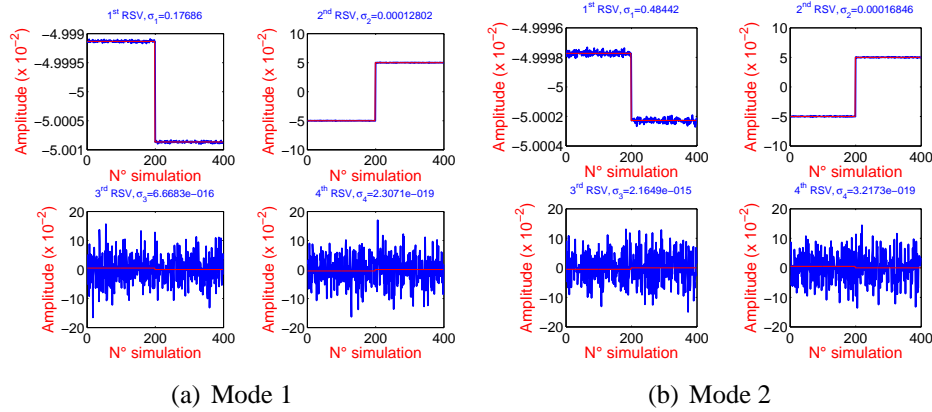


FIGURE 5.8 – Quatre premiers vecteurs droits de la matrice des deux premiers vecteurs propres pour les ELB. Les courbes rouges indiquent les cas non bruités.

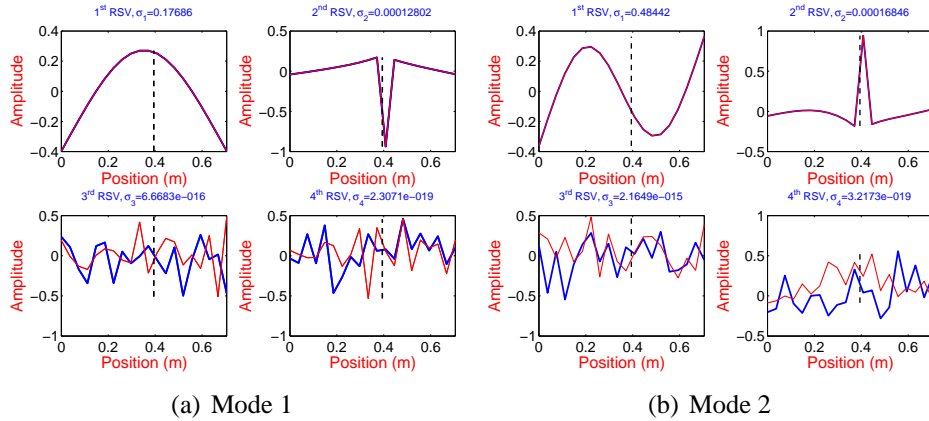
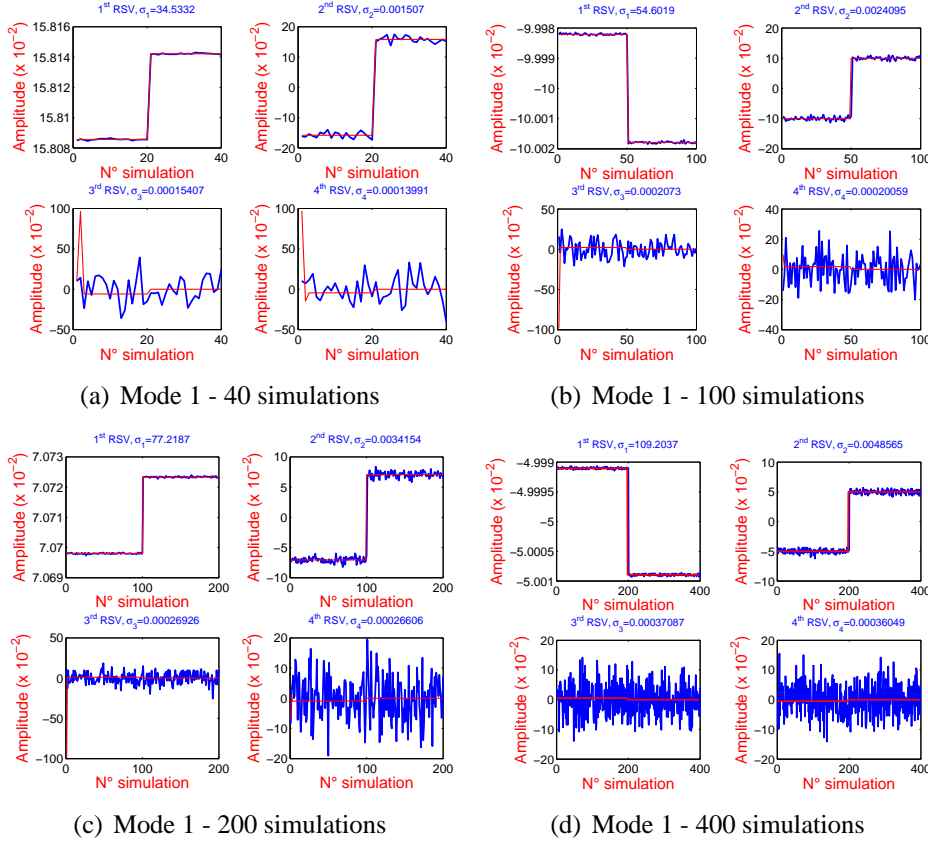


FIGURE 5.9 – Quatre premiers vecteurs gauches de la matrice des deux premiers vecteurs propres obtenus pour les ELB. Les courbes rouges indiquent les cas non bruités.



#### 5.1.4.4 Influence du nombre d'essais

Le nombre d'essais pour les méthodes de détection statistiques est un paramètre essentiel qui peut influencer énormément la qualité des résultats d'identification d'endommagement. Les figures 5.10 et 5.11 montrent les vecteurs singuliers droits et gauches obtenus par l'application de la SVD sur une collection de déformées modales fournies par 20, 50, 100 et 200 simulations bruitées pour l'état endommagé de la poutre et non bruitées pour son état sain.



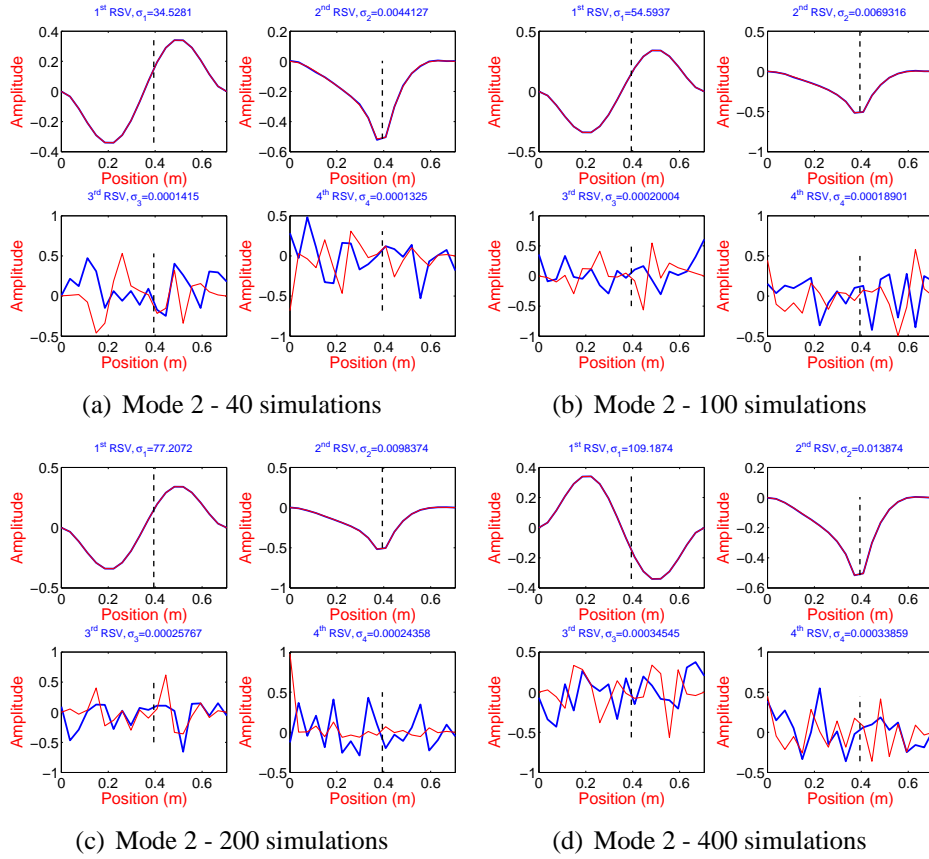
**FIGURE 5.10 – Quatre premiers vecteurs droits de la matrice de la 1<sup>ère</sup> déformée modale pour 40, 100 200 et 400 simulations**

On voit que la technique n'est pas nécessairement plus performante lorsque le nombre de réalisations augmente. Avec peu d'essais pour chaque état (20 simulations), un saut apparaît toujours sur les vecteurs droits à partir du 1<sup>er</sup> essai de l'état endommagé.

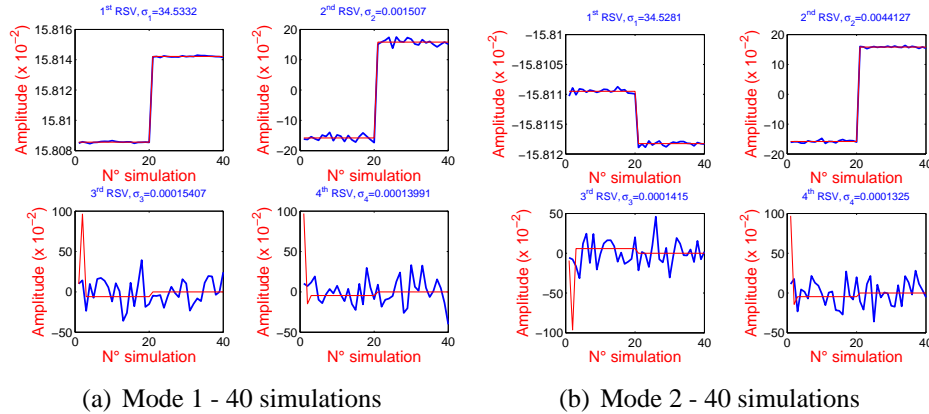
Nous allons maintenant nous intéresser à tester l'efficacité de la méthode par rapport au nombre d'essais nécessaire pour l'état endommagé. Nous considérons tout d'abord que seulement 20 réalisations sont effectuées sur l'état intact de la poutre E-E numérique.

La figure 5.12 présente les vecteurs propres singuliers provenant de la SVD appliquée sur la collection des deux premières déformées modales pour 40 simulations bruitées (1% de bruit ajouté sur les modes propres) : 20 états sains - 20 états endommagés. Un saut apparaît bien à l'essai  $n^o$  21.

Ensuite, la SVD est appliquée sur des collections provenant de  $20 + n_s$  simulations,  $n_s$  étant le nombre de simulations de l'état endommagé. Par exemple sur la figure 5.13, pour 21 réalisations, une chute



**FIGURE 5.11 – Quatre premiers vecteurs gauches de la matrice de la 2<sup>ème</sup> déformée modale pour 40, 100 200 et 400 simulations**



**FIGURE 5.12 – Quatre premiers vecteurs droits de la matrice des deux premières déformées modales pour 40 simulations : 20 états sains - 20 états endommagés avec 1% de bruit**

apparaît toujours à l'essai  $n^{\circ} 21$ . Donc le défaut est encore détectable.

Avec 5 essais pour l'état endommagé (Fig. 5.14), les résultats s'améliorent puisque nous arrivons à visualiser des valeurs presque stables à partir de l'essai  $n^{\circ} 21$  sur les deux premiers vecteurs singuliers droits, ce qui confirme l'apparition d'un défaut à cet instant.

Nous imposons maintenant un niveau de bruit plus élevé, soit 2% ajouté sur les déformées modales propres, afin de s'approcher au mieux des conditions expérimentales.  $20 + n_s$  simulations sont générées à nouveau. Les graphes des figures 5.15, 5.16 et 5.17 montrent qu'en présence d'un niveau de

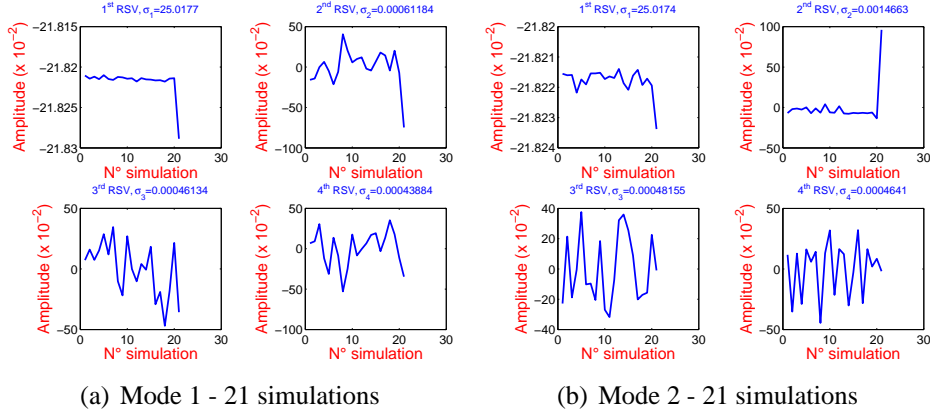


FIGURE 5.13 – Quatre premiers vecteurs droits de la matrice des deux premières déformées modales pour 21 simulations : 20 états sains - 1 état endommagé avec 1% de bruit

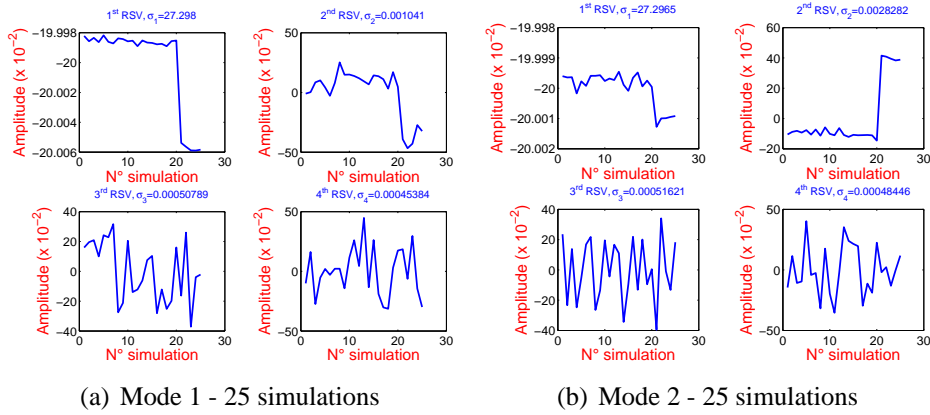


FIGURE 5.14 – Quatre premiers vecteurs droits de la matrice des deux premières déformées modales pour 25 simulations : 20 états sains - 5 états endommagés avec 1% de bruit

bruit de mesure élevé, 20 simulations sont insuffisantes pour détecter une modification structurelle dans la poutre E-E.

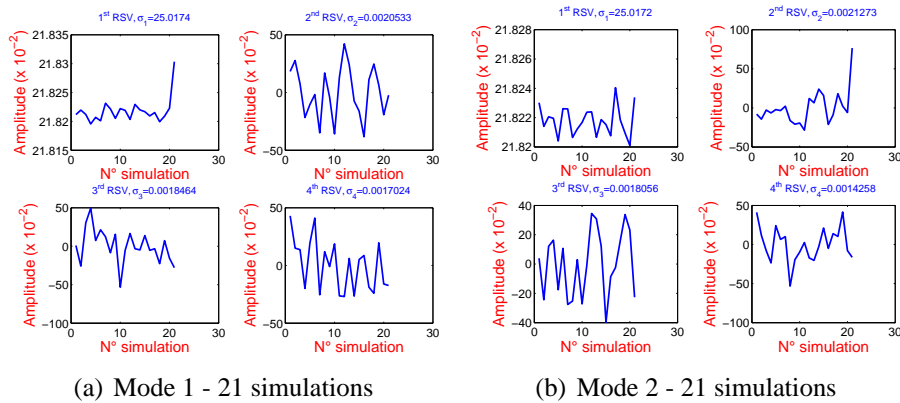
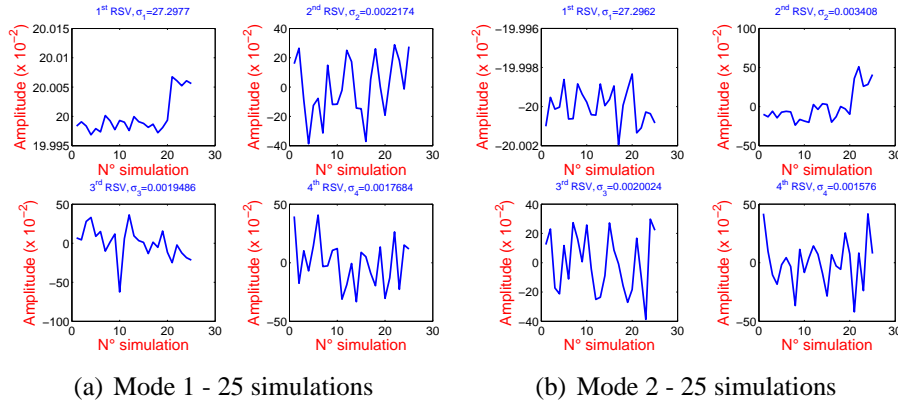
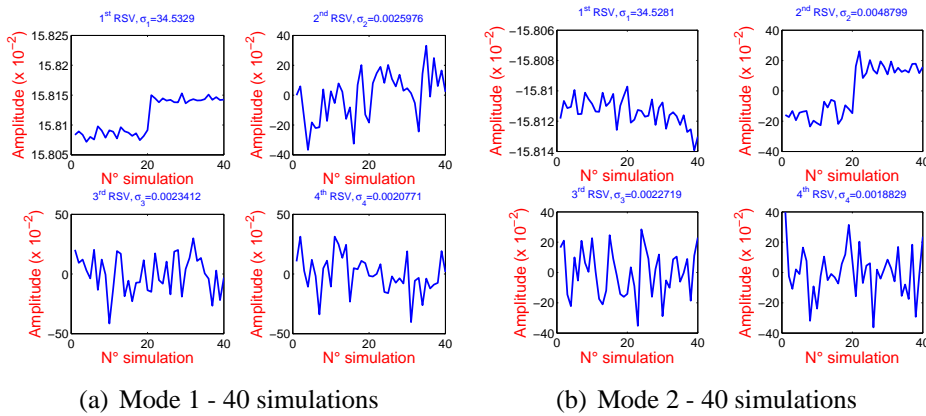


FIGURE 5.15 – Quatre premiers vecteurs droits de la matrice des deux premières déformées modales pour 21 simulations : 20 états sains - 1 état endommagé avec 2% de bruit



**FIGURE 5.16 – Quatre premiers vecteurs droits de la matrice des deux premières déformées modales pour 25 simulations : 20 états sains - 5 états endommagés avec 2% de bruit**



**FIGURE 5.17 – Quatre premiers vecteurs droits de la matrice des deux premières déformées modales pour 40 simulations : 20/état sain - 20/état endommagé avec 2% de bruit**

En résumé, on peut dire que la technique fondée sur la SVD est capable de détecter et localiser les endommagements lorsque les paramètres modaux utilisés sont peu bruités. Par contre, lorsque les paramètres modaux sont sujets à un bruit de mesure élevé, l'efficacité de la méthode dépendra énormément du nombre d'essais réalisés expérimentalement. Une analyse de sensibilité plus poussée serait intéressante à réaliser dans des travaux ultérieurs à cette thèse en fonction du nombre de simulations, du bruit de mesure et aussi de la sévérité du défaut. Ceci permettra de déterminer les interdépendances entre les paramètres afin de trouver les paramètres optimaux pour la détection d'endommagements.

## 5.2 Méthode fondée sur les variations relatives des fréquences

Dans ce paragraphe, nous allons tout d'abord présenter un rappel de la méthode développée par T.T.H. Le [1]. Cette méthode est fondée sur les variations relatives des fréquences propres entre deux états : état de référence et état modifié. Lorsque des modifications de masse et de raideur sont localisées (entaille ou fissure), une estimation au premier ordre est cependant utilisée afin de détecter, localiser et quantifier ces modifications. Seules les fréquences propres, les déformées modales correspondantes ainsi que les deux premières dérivées de l'état sain et les fréquences propres de l'état endommagé sont supposées connues.

T.T.H. Le a supposé dans sa thèse afin de localiser l'endommagement que les changements de tension sont connus, et juste les modifications de masse et de raideur sont inconnues. Ici, une estimation des variations relatives des fréquences est réalisée en considérant que les modifications de tension, de masse et de raideur sont inconnues. Nous présentons ensuite une application sur des données numériques. L'objectif est d'évaluer la capacité de la méthode pour la détection et la localisation d'un endommagement puis de quantifier les modifications physiques (masse, raideur) que la structure a subies.

### 5.2.1 Estimation analytique de la variation des paramètres modaux

Lorsque le défaut apparaît, la rigidité et la masse linéique sont modifiées et sont respectivement notées  $\widetilde{EI}(x)$  et  $\widetilde{\mu}(x)$ .

$$\begin{cases} \widetilde{EI}(x) = EI(x) + \Delta EI(x) \\ \widetilde{\mu}(x) = \mu(x) + \Delta \mu(x) \end{cases} \quad (5.6)$$

De plus, si la poutre est sous tension,  $\widetilde{T} = T + \Delta T$ . Les changements de rigidité, de masse et aussi de tension entraînent une perturbation des valeurs propres  $\lambda_n$  et des modes propres  $\phi_n$  :

$$\begin{cases} \widetilde{\phi}_n(x) = \phi_n(x) + \Delta \phi_n(x) \\ \widetilde{\lambda}_n(x) = \lambda_n(x) + \Delta \lambda_n(x) \end{cases} \quad (5.7)$$

Une approximation au premier ordre de la variation des paramètres modaux pour de petites perturbations  $\Delta EI(x)$ ,  $\Delta \mu(x)$  est donnée par [4, 5] :

$$\widetilde{\lambda}_n \widetilde{\mu}_n \widetilde{\phi}_n - \lambda_n \mu_n \phi_n \approx \lambda_n \mu_n \Delta \phi_n + (\Delta \lambda_n \mu_n + \lambda_n \Delta \mu_n) \phi_n \quad (5.8)$$

Une approximation au premier ordre est également exprimée pour de petites perturbations  $\Delta T$  par :

$$\widetilde{T} \widetilde{\phi}_n - T \phi_n = \widetilde{T} \Delta \phi_n + \Delta T \phi_n \approx T \Delta \phi_n + \Delta T \phi_n \quad (5.9)$$

L'équation aux valeurs propres d'une poutre modifiée avec tension s'écrit :

$$(\widetilde{EI}(x) \widetilde{\phi}_n''(x))'' - \widetilde{T} \widetilde{\phi}_n''(x) - \lambda_n \widetilde{\mu}(x) \widetilde{\phi}_n(x) = 0 \quad (5.10)$$

avec les mêmes conditions aux bords qu'à l'état sain :

- Bi-appuyée :  $\tilde{\phi}_n(0) = \tilde{\phi}_n(L) = 0$  et  $\tilde{\phi}_n''(0) = \tilde{\phi}_n''(L) = 0$ .

- Bi-encastée :  $\tilde{\phi}_n(0) = \tilde{\phi}_n(L) = 0$  et  $\tilde{\phi}_n'(0) = \tilde{\phi}_n'(L) = 0$ .

Pour toute fonction  $u(x)$  ayant les mêmes conditions aux bords, nous avons :

$$\int_0^L \left( \tilde{EI}(x) \tilde{\phi}_n''(x) u''(x) + \tilde{T} \tilde{\phi}_n'(x) u'(x) - \tilde{\lambda}_n \tilde{\mu}(x) \tilde{\phi}_n(x) u(x) \right) dx = 0 \quad (5.11)$$

En choisissant  $u(x) = \tilde{\phi}_n(x)$ , l'équation (Eq :5.11) se réécrit :

$$\int_0^L \tilde{EI}(x) \tilde{\phi}_n''^2(x) dx + \tilde{T} \int_0^L \tilde{\phi}_n'^2(x) dx = \tilde{\lambda}_n \int_0^L \tilde{\mu}(x) \tilde{\phi}_n^2(x) dx \quad (5.12)$$

En négligeant les termes d'ordre supérieur et en utilisant les équations (5.6) et (5.7), l'équation (5.12) devient :

$$\begin{aligned} \int_0^L \Delta EI(x) \phi_n''^2(x) dx + 2 \int_0^L EI(x) \Delta \phi_n''(x) \phi_n''(x) dx + \Delta T \int_0^L \phi_n'^2(x) dx + 2T \int_0^L \Delta \phi_n'(x) \phi_n'(x) dx = \\ \Delta \lambda_n \int_0^L \mu(x) \phi_n^2(x) dx + \lambda_n \int_0^L \Delta \mu(x) \phi_n^2(x) dx + 2\lambda_n \int_0^L \mu(x) \Delta \phi_n(x) \phi_n(x) dx \end{aligned} \quad (5.13)$$

On suppose que la variation  $\Delta \phi_n(x)$  peut se décomposer sur la base des modes propres du système à l'état sain  $\Delta \phi_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk} \phi_k(x)$ . Nous aurons donc :

$$\int_0^L EI(x) \Delta \phi_n''(x) \phi_n''(x) dx + T \int_0^L \Delta \phi_n'(x) \phi_n'(x) dx = \lambda_n \int_0^L \Delta \phi_n(x) \phi_n(x) dx \quad (5.14)$$

Nous en déduisons alors :

$$\int_0^L \Delta EI(x) \phi_n''^2(x) dx + \Delta T \int_0^L \phi_n'^2(x) dx - \lambda_n \int_0^L \Delta \mu(x) \phi_n^2(x) dx = \Delta \lambda_n \int_0^L \mu(x) \phi_n^2(x) dx \quad (5.15)$$

Le coefficient  $\gamma_n$  est défini par :

$$\gamma_n = \xi^2 L^2 \frac{\int_0^L \phi_n''^2(x) dx}{\int_0^L \phi_n'^2(x) dx} = \xi^2 \frac{L^2 \|\phi_n''\|_2^2}{\|\phi_n'\|_2^2} \quad (5.16)$$

avec  $\xi = \sqrt{\frac{EI}{TL^2}}$

En utilisant l'équation (5.16), l'expression (5.15) peut se réécrire de la manière suivante :

$$\frac{\Delta\lambda_n}{\lambda_n} \approx \frac{1}{(1+\gamma_n)} \frac{\Delta T}{T} + \frac{\gamma_n}{1+\gamma_n} \frac{\int_0^L \Delta EI(x) \phi_n''(x)^2 dx}{\int_0^L EI(x) (\phi_n''(x))^2 dx} - \frac{\int_0^L \Delta\mu(x) \phi_n^2(x) dx}{\int_0^L \mu(x) \phi_n^2(x) dx} \quad (5.17)$$

Ce qui mène à l'expression de la variation relative des fréquences suivante :

$$\frac{\Delta f_n}{f_n} \approx \left[ \frac{1}{1+\gamma_n} \frac{\Delta T}{T} + \frac{\gamma_n}{2(1+\gamma_n)} \frac{\int_0^L \Delta EI(x) \phi_n''^2(x) dx}{\int_0^L EI(x) \phi_n''^2(x) dx} - \frac{1}{2} \frac{\int_0^L \Delta\mu(x) \phi_n^2(x) dx}{\int_0^L \mu(x) \phi_n^2(x) dx} \right] \quad (5.18)$$

avec  $f_n = \frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\pi}$  et  $\gamma_n$  le coefficient qui représente le rapport entre la rigidité modale due à EI et celle due à la tension T

Lorsque la taille du défaut  $\Delta L$  est suffisamment petite, nous supposons que  $\phi_n(x)$  et  $\phi_n''(x)$  sont constants pour  $x \in [x_0 - \frac{\Delta L}{2}, x_0 + \frac{\Delta L}{2}]$ . Nous déduisons donc :

$$\frac{\Delta f_n}{f_n} \approx \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{(1+\gamma_n)} \frac{\Delta T}{T} + \frac{\gamma_n}{1+\gamma_n} \frac{\int_0^L \Delta EI(x) dx}{EIL} \cdot \frac{L \phi_n''^2(x_0)}{\|\phi_n''\|_2^2} - \frac{\int_0^L \Delta\mu(x) dx}{\mu L} \frac{L \phi_n^2(x_0)}{\|\phi_n\|_2^2} \right] \quad (5.19)$$

De plus, le cas où les variations  $\Delta EI(x)$  et  $\Delta\mu(x)$  sont supposées de la forme d'une fenêtre rectangulaire, l'équation (5.19) devient :

$$\boxed{\frac{\Delta f_n}{f_n} \approx \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{1+\gamma_n} \frac{\Delta T}{T} + \frac{\gamma_n}{1+\gamma_n} \frac{\Delta EI \Delta L}{EIL} \frac{L \phi_n''^2(x_0)}{\|\phi_n''\|_2^2} - \frac{\Delta\mu \Delta L}{\mu L} \frac{L \phi_n^2(x_0)}{\|\phi_n\|_2^2} \right]} \quad (5.20)$$

Nous trouvons que pour un même défaut de rigidité, la variation relative des fréquences  $\left| \frac{\Delta f_n}{f_n} \right|$  atteint la valeur maximale (ou minimale) lorsque le défaut est concentré sur un ventre (ou un nœud) de la courbure modale correspondante  $\phi_n''(x)$ . De même, pour un défaut de masse,  $\left| \frac{\Delta f_n}{f_n} \right|$  atteint la valeur maximale (ou minimale) lorsque le défaut est concentré sur un ventre (ou un nœud) du mode correspondant  $\phi_n(x)$ .

Pour plus de détails se référer à la thèse de T.T.H. Le [1].

### 5.2.2 Localisation pour une poutre avec $\Delta\mu(x)$ et $\Delta EI(x)$

Pour une poutre sans tension ( $T=0$  et  $\Delta T = 0$ ), l'estimation de la variation relative des fréquences  $\Delta f_n/f_n$  pour un modèle de poutre avec une perturbation locale de masse  $\Delta\mu(x)$  et une perturbation locale de rigidité  $\Delta EI(x)$  à la position  $x_0$ , et un défaut de petite taille  $\Delta L \ll L$ , s'écrit comme suit :

$$\boxed{\frac{\Delta f_n}{f_n} \approx \frac{1}{2} \left[ \frac{\Delta EI \Delta L}{EIL} \frac{L \phi_n''^2(x_0)}{\|\phi_n''\|_2^2} - \frac{\Delta\mu \Delta L}{\mu L} \frac{L \phi_n^2(x_0)}{\|\phi_n\|_2^2} \right]} \quad (5.21)$$

La variation relative des fréquences peut s'écrire alors :

$$\frac{\Delta f_n}{f_n} \approx G_n(x_0) \frac{\Delta EI \Delta L}{EIL} - H_n(x_0) \frac{\Delta \mu \Delta L}{\mu L} \quad (5.22)$$

avec  $G_n(x) = \frac{1}{2} \frac{L \phi_n''^2(x)}{\|\phi_n''\|_2^2}$  et  $H_n(x) = \frac{1}{2} \frac{L \phi_n^2(x)}{\|\phi_n\|_2^2}$ .

Pour deux fréquences différentes  $n \neq m$ , nous avons :

$$\frac{\Delta f_n}{f_n} \approx G_n(x_0) \frac{\Delta EI \Delta L}{EIL} - H_n(x_0) \frac{\Delta \mu \Delta L}{\mu L} \quad (5.23)$$

$$\frac{\Delta f_m}{f_m} \approx G_m(x_0) \frac{\Delta EI \Delta L}{EIL} - H_m(x_0) \frac{\Delta \mu \Delta L}{\mu L} \quad (5.24)$$

La quantité  $\frac{\Delta \mu \Delta L}{\mu L}$  est éliminée en combinant les équations (5.23) et (5.24) :

$$\frac{\Delta f_n}{f_n} H_m(x_0) - \frac{\Delta f_m}{f_m} H_n(x_0) \approx \frac{\Delta EI \Delta L}{EIL} (G_n(x_0) H_m(x_0) - G_m(x_0) H_n(x_0)) \quad (5.25)$$

De même, on écrit l'expression (5.25) pour un autre couple de fréquences  $n \neq k$  :

$$\frac{\Delta f_n}{f_n} H_k(x_0) - \frac{\Delta f_k}{f_k} H_n(x_0) \approx \frac{\Delta EI \Delta L}{EIL} (G_n(x_0) H_k(x_0) - G_k(x_0) H_n(x_0)) \quad (5.26)$$

La quantité  $\frac{\Delta EI \Delta L}{EIL}$  est éliminée à son tour à l'aide des équations (5.25) et (5.26) :

$$\frac{\Delta_n H_m(x_0) - \Delta_m H_n(x_0)}{\Delta_n H_k(x_0) - \Delta_k H_n(x_0)} \approx \frac{G_n(x_0) H_m(x_0) - G_m(x_0) H_n(x_0)}{G_n(x_0) H_k(x_0) - G_k(x_0) H_n(x_0)} \quad (5.27)$$

avec  $\Delta_m = \frac{\Delta f_m}{f_m}$ ,  $\Delta_n = \frac{\Delta f_n}{f_n}$  et  $\Delta_k = \frac{\Delta f_k}{f_k}$ .

On définit alors la fonction F par :

$$F_{n,m,k}(x) = [\Delta_n H_m(x) - \Delta_m H_n(x)] [G_n(x) H_k(x) - G_k(x) H_n(x)] \\ - [\Delta_n H_k(x) - \Delta_k H_n(x)] [G_n(x) H_m(x) - G_m(x) H_n(x)]$$

$F_{n,m,k}(x)$  est nul pour  $x = x_0$ .

Ainsi, avec trois fréquences propres mesurées, pour localiser le défaut, il faut chercher  $x_0$  qui minimise  $F_{n,m,k}(x)$  soit  $x_0 = \text{Argmin}(F_{1,2,3}(x))$ .

En utilisant différents triplets  $(n, m, k)$  de fréquences, on dispose de multiples informations redondantes pour déterminer  $x_0$ . En pratique, avec  $l$  premières fréquences mesurées ( $l \geq 3$ ), pour localiser



le défaut, nous cherchons  $x_0$  qui minimise :

$$Q_l(x) = \sum_{1 \leq n, m, k \leq l} |F_{n, m, k}(x)|$$

Pour chaque valeur de  $x$ , les fonctions  $Q_l(x)$  croissent avec le niveau d'importance de l'endommagement et aussi avec le nombre des fréquences utilisées  $l$ .

### 5.2.3 Localisation pour une poutre avec $\Delta T$ , $\Delta\mu(x)$ et $\Delta EI(x)$

Dans ce paragraphe, nous considérons que la poutre est soumise à une variation de tension  $\Delta T$ , des perturbations de masse  $\Delta\mu(x)$  et de raideur  $\Delta EI(x)$ . Les modifications physiques sont induites par un endommagement de taille  $\Delta L \ll L$ . Dans ce cas, il y a trois inconnues.

La variation relative des fréquences va s'écrire alors :

$$\frac{\Delta f_n}{f_n} \approx \beta_n \frac{\Delta T}{T} + G_n(x_0) \frac{\Delta EI \Delta L}{EIL} - H_n(x_0) \frac{\Delta \mu \Delta L}{\mu L} \quad (5.28)$$

avec :  $G_n(x) = \frac{\gamma_n}{2(1 + \gamma_n)} \frac{L \phi_n''^2(x)}{\|\phi_n''\|_2^2}$ ,  $H_n(x) = \frac{1}{2} \frac{L \phi_n^2(x)}{\|\phi_n\|_2^2}$ ,  $\beta_n = \frac{1}{2(1 + \gamma_n)}$  et  $\gamma_n$  le coefficient défini dans (Eq. (5.16))

L'équation (5.28) se réécrit donc pour quatre fréquences différentes  $n \neq m \neq k \neq p$  :

$$\frac{\Delta f_n}{f_n} \approx \beta_n \frac{\Delta T}{T} + G_n(x_0) \frac{\Delta EI \Delta L}{EIL} - H_n(x_0) \frac{\Delta \mu \Delta L}{\mu L} \quad (5.29)$$

$$\frac{\Delta f_m}{f_m} \approx \beta_m \frac{\Delta T}{T} + G_m(x_0) \frac{\Delta EI \Delta L}{EIL} - H_m(x_0) \frac{\Delta \mu \Delta L}{\mu L} \quad (5.30)$$

$$\frac{\Delta f_k}{f_k} \approx \beta_k \frac{\Delta T}{T} + G_k(x_0) \frac{\Delta EI \Delta L}{EIL} - H_k(x_0) \frac{\Delta \mu \Delta L}{\mu L} \quad (5.31)$$

$$\frac{\Delta f_p}{f_p} \approx \beta_p \frac{\Delta T}{T} + G_p(x_0) \frac{\Delta EI \Delta L}{EIL} - H_p(x_0) \frac{\Delta \mu \Delta L}{\mu L} \quad (5.32)$$

Il faut donc résoudre un système de quatre équations à trois inconnues, c'est-à-dire avoir quatre équations compatibles pour trois inconnues. Cela consiste à calculer le déterminant, qui vaut zéro pour  $x = x_0$ , formé par les coefficients  $\Delta = \frac{\Delta f}{f}$ ,  $G$ ,  $H$  et  $\beta$ . On définit la fonction  $F_{n, m, k, p}(x)$  par :

$$F_{n, m, k, p}(x) = \begin{vmatrix} \Delta_p(x) & -\beta_p(x) & -G_p(x) & H_p(x) \\ \Delta_k(x) & -\beta_k(x) & -G_k(x) & H_k(x) \\ \Delta_m(x) & -\beta_m(x) & -G_m(x) & H_m(x) \\ \Delta_n(x) & -\beta_n(x) & -G_n(x) & H_n(x) \end{vmatrix}$$

Pour localiser le défaut, il faut chercher  $x_0$  qui minimise  $F_{n,m,k,p}(x)$ . La valeur  $x_0$  minimisant  $|F_{n,m,k,p}(x)|$  est définie par un quadruplet de fréquences  $(m, n, k \text{ et } p)$ . Donc, avec 4 fréquences propres mesurées avant et après modification de masse, de raideur et de tension dans la poutre, et connaissant les déformées modales correspondantes avec leur dérivées, il est possible d'évaluer la valeur  $x = x_0$  comme  $x_0 = \text{Argmin}(F_{1,2,3,4}(x))$ .

En pratique, avec  $l$  premières fréquences mesurées ( $l \geq 4$ ), pour localiser le défaut, nous cherchons  $x_0$  qui minimise :

$$Q_l(x) = \sum_{1 \leq n,m,k,p \leq l} |F_{n,m,k,p}(x)|$$

### 5.2.4 Application sur des données numériques de la poutre E-E

Dans cette partie, nous effectuons des simulations numériques pour l'état sain et différents états endommagés en modifiant la masse linéique de  $\Delta\mu$  et la rigidité en flexion de  $\Delta EI$ .

Le modèle est celui de la poutre en aluminium bi-encastée déjà implémentée numériquement dans les études précédentes et dont les caractéristiques sont répertoriées dans le tableau 5.1.

Comme pour les simulations réalisées par T.T.H. Le dans sa thèse [1], un modèle EF de 500 éléments est considéré d'où 501 nœuds, chaque nœud ayant 2 degrés de liberté (déplacement vertical et rotation). La taille de l'élément sera  $l_d = 1.41mm$ . Les sept premiers modes sont pris en compte. Ce choix est arbitrairement adopté car T.T.H. Le avait remarqué que le nombre de points n'a pas d'effet sur la qualité des résultats.

#### 5.2.4.1 Cas de défaut et paramètres modaux

Etat	Réduction	Profondeur	Hauteur	Inertie	Raideur	Variation de raideur	Variation de masse
$n^\circ$	(%)	$h_0(mm)$	$h(mm)$	$I \cdot 10^3(mm^4)$	$EI \cdot 10^5(GPa.m^4)$	$\frac{\Delta EI \Delta L}{EI L}(\%)$	$\frac{\Delta \mu \Delta L}{\mu L}(\%)$
0	0	0.00	8.10	1.771	1.095	0	0.000
1	0.5	0.04	8.06	1.745	1.078	0.299	0.001
2	1	0.08	8.02	1.719	1.062	0.594	0.002
3	1.5	0.12	7.98	1.693	1.046	0.887	0.003
4	2	0.16	7.94	1.667	1.030	1.176	0.004
5	2.5	0.20	7.90	1.642	1.015	1.463	0.005
6	3	0.24	7.86	1.617	0.999	1.747	0.006
7	3.5	0.28	7.82	1.592	0.984	2.027	0.007
8	4	0.32	7.78	1.567	0.969	2.305	0.008
9	4.5	0.36	7.74	1.543	0.954	2.580	0.009
10	5	0.41	7.70	1.519	0.939	2.853	0.010

TABLEAU 5.2 – Caractéristiques des différents cas d'endommagement simulés

Le défaut a été modélisé par une réduction de la section de l'élément fini  $n^\circ 227$ , donc à l'abscisse  $321mm$ , qui représente une entaille avec  $\Delta L = 1.41mm$ . Cette réduction, affectant l'épaisseur de la poutre, va entraîner une perte d'inertie locale  $\Delta EI$  et une perte de section, donc une perte de masse locale  $\Delta\mu$ . Le tableau 5.2 reporte les différentes caractéristiques des défauts simulés. Les valeurs impliquent qu'une entaille affectant l'épaisseur d'une poutre induit une perte de rigidité plus importante en pourcentage qu'une perte de masse.

La figure 5.18 montre les sept premières déformées modales de la poutre intacte et le tableau 5.3

Mode	Saine	0.5% de réduction		2% de réduction	
	$f_n$	$\tilde{f}_n$	$\frac{\Delta f_n}{f_n} (10^{-3}\%)$	$\tilde{f}_n$	$\frac{\Delta f_n}{f_n} (10^{-3}\%)$
$n^\circ 1$	78.8282	78.8273	-1.142	78.8250	-5.201
$n^\circ 2$	217.2924	217.2918	-0.276	217.2903	-1.151
$n^\circ 3$	425.979	425.973	-1.619	425.951	-8.569
$n^\circ 4$	704.1664	704.1613	-0.724	704.1452	-3.820
$n^\circ 5$	1051.9031	1051.8923	-1.027	1051.8579	-5.457
$n^\circ 6$	1469.1870	1469.1681	-1.286	1469.1083	-6.799
$n^\circ 7$	1956.0182	1956.0087	-0.4857	1955.9785	-2.572

TABLEAU 5.3 – Sept premières fréquences propres de la poutre E-E saine et avec défaut

reporte les sept premières fréquences propres de la poutre saine et endommagée obtenues par la résolution du système aux valeurs propres.

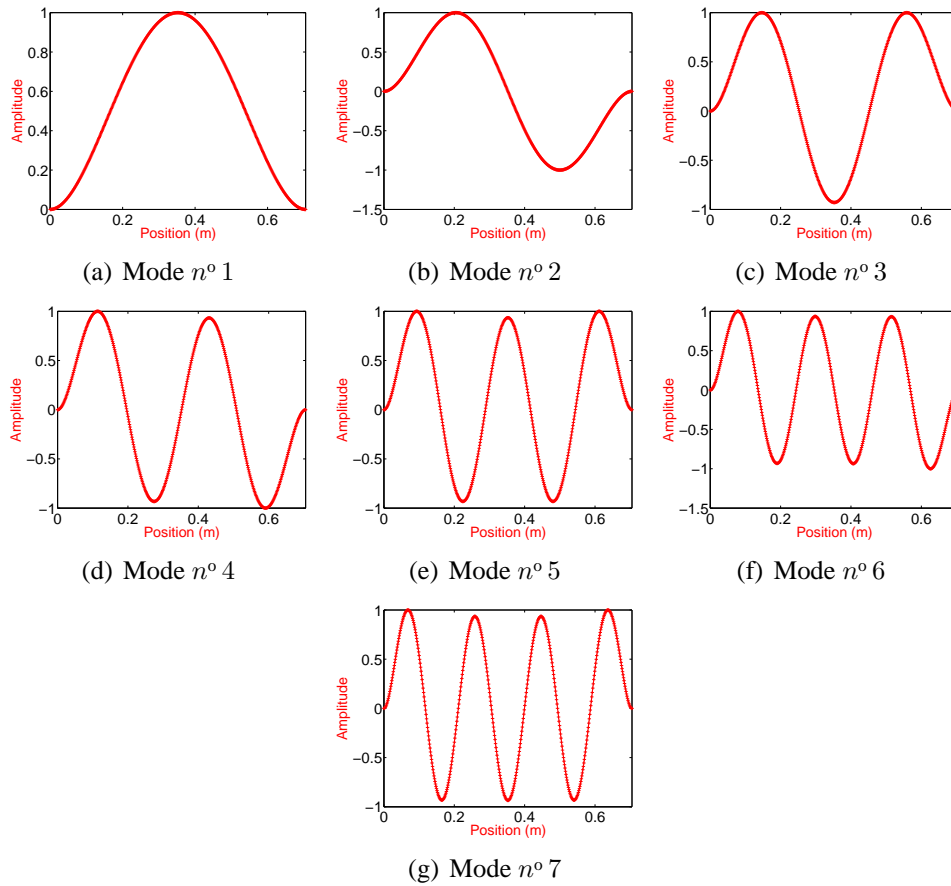


FIGURE 5.18 – Sept premières déformées modales de la poutre E-E

#### 5.2.4.2 Localisation et quantification de la sévérité du défaut

On suppose dans ce cas que la tension est nulle. Il n'y a donc qu'une perturbation de masse  $\Delta\mu(x)$  et de raideur  $\Delta EI(x)$ . La variation relative de fréquence va alors s'écrire :

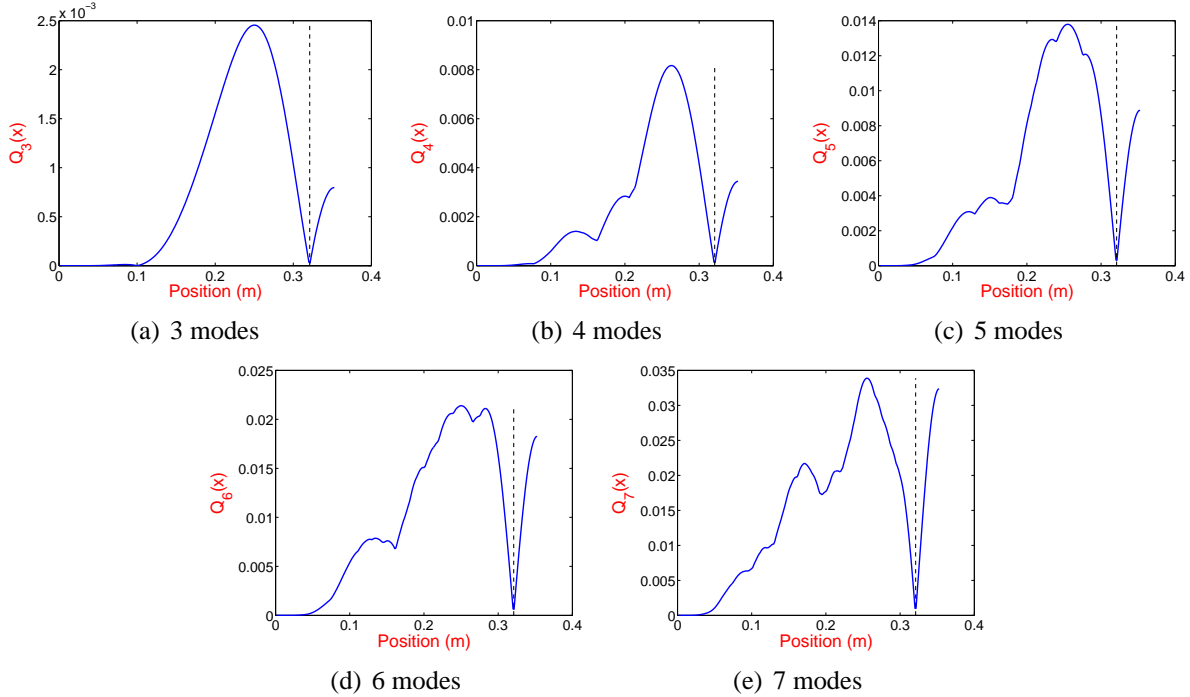
$$\frac{\Delta f_n}{f_n} \approx G_n(x_0) \frac{\Delta EI \Delta L}{EIL} - H_n(x_0) \frac{\Delta \mu \Delta L}{\mu L}$$

Afin de localiser la modification structurale, nous avons besoin d'au moins trois modes, et nous devons chercher l'abscisse  $x_0$  du minimum de la fonction  $Q_l(x)$  définie par :

$$Q_l(x) = \sum_{1 \leq n, m, k \leq l} |F_{n,m,k}(x)| \quad (5.33)$$

où  $l$  est le nombre de modes utilisés et avec

$$|F_{n,m,k}(x)| = \left[ \frac{\Delta f_n}{f_n} H_m(x) - \frac{\Delta f_m}{f_m} H_n(x) \right] [G_n(x) H_k(x) - G_k(x) H_n(x)] - \left[ \frac{\Delta f_n}{f_n} H_k(x) - \frac{\Delta f_k}{f_k} H_n(x) \right] [G_n(x) H_m(x) - G_m(x) H_n(x)]$$



**FIGURE 5.19 –  $Q_n(x)$  pour les différents nombre de modes une modification de 2% autour de  $x_0 = 0.320m$ . Le trait noir en pointillé indique la position réelle du défaut.**

La figure 5.19 illustre la fonction  $Q_n(x)$  avec  $n = 3, 4, \dots, 7$  et pour le cas de défaut n° 4 représentant une réduction de section de 2%. Le minimum est obtenu avec une bonne précision à partir de 4 modes, alors qu'avec 3 modes on observe deux minimums dont un qui se situe autour de  $x_0 = 0.320m$ . A partir de  $n = 4$ , on peut observer que la précision de la localisation de  $x_0$  augmente avec  $n$ . La figure 5.20 montre que la méthode a également réussi à localiser les petits défauts.

Afin de quantifier l'importance de l'endommagement, nous avons calculé  $\|Q_n\|_\infty$  pour toutes les entailles réalisées. La figure 5.21 montre que  $\|Q_n\|_\infty$  augmente régulièrement avec l'importance du défaut pour les différents  $n$ .

Afin d'évaluer le poids de chacun des deux termes de la fonction  $F$  à minimiser, nous avons tracé tout d'abord les deux courbes  $G(x)$  et  $H(x)$  sur la figure 5.22 pour les 7 premiers modes. Les deux

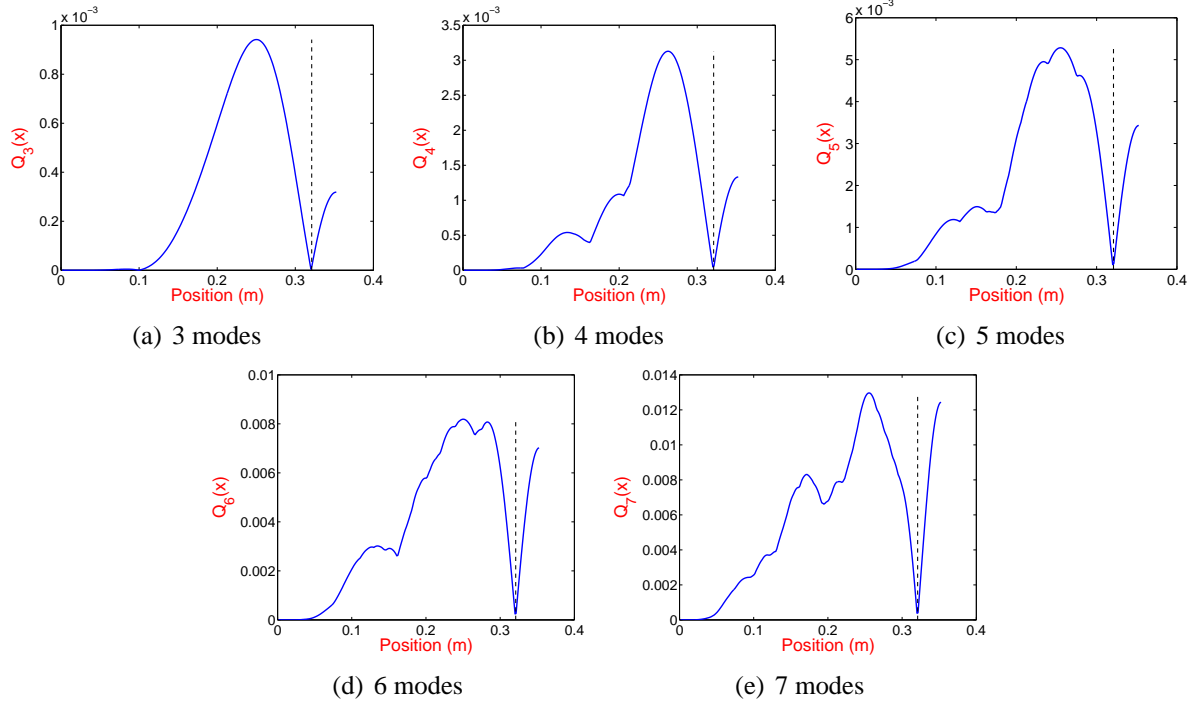


FIGURE 5.20 –  $Q_n(x)$  obtenus pour une modification de 0.5% autour  $x_0 = 0.320m$ . Le trait noir en pointillé indique la position réelle du défaut.

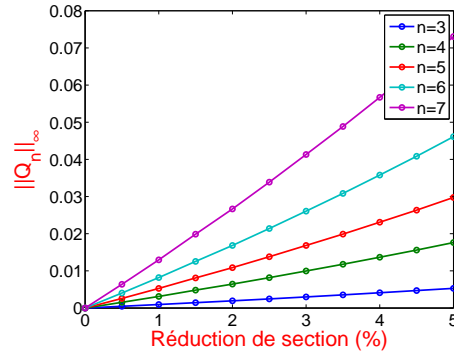


FIGURE 5.21 –  $\|Q_n\|_\infty$  en fonction de la réduction de section

courbes sont cependant du même ordre de grandeur pour tous les modes sauf pour le 1<sup>er</sup> mode où on voit que  $H(x)$  est plus important que  $G(x)$ .

Ensuite, nous avons présenté les fonctions  $G(x) \frac{\Delta EI \Delta L}{EIL}$  et  $H(x) \frac{\Delta \mu \Delta L}{\mu L}$  pour différencier le poids de chacun des deux termes avec les modifications de masse et de rigidité obtenues pour le 4<sup>ème</sup> cas de défaut (Fig. 5.23). On voit que le terme avec  $G(x)$  est plus important que celui avec  $H(x)$ , ceci est dû à la variation de raideur qui est plus élevée que celle de masse.

#### 5.2.4.3 Quantification des modifications $\frac{\Delta EI \Delta L}{EIL}$ et $\frac{\Delta \mu \Delta L}{\mu L}$

En pratique, les changements de masse ou de rigidité sont inconnus. Nous nous intéressons alors dans ce paragraphe au problème de la quantification de l'endommagement à partir des paramètres modaux des états sain et endommagé.

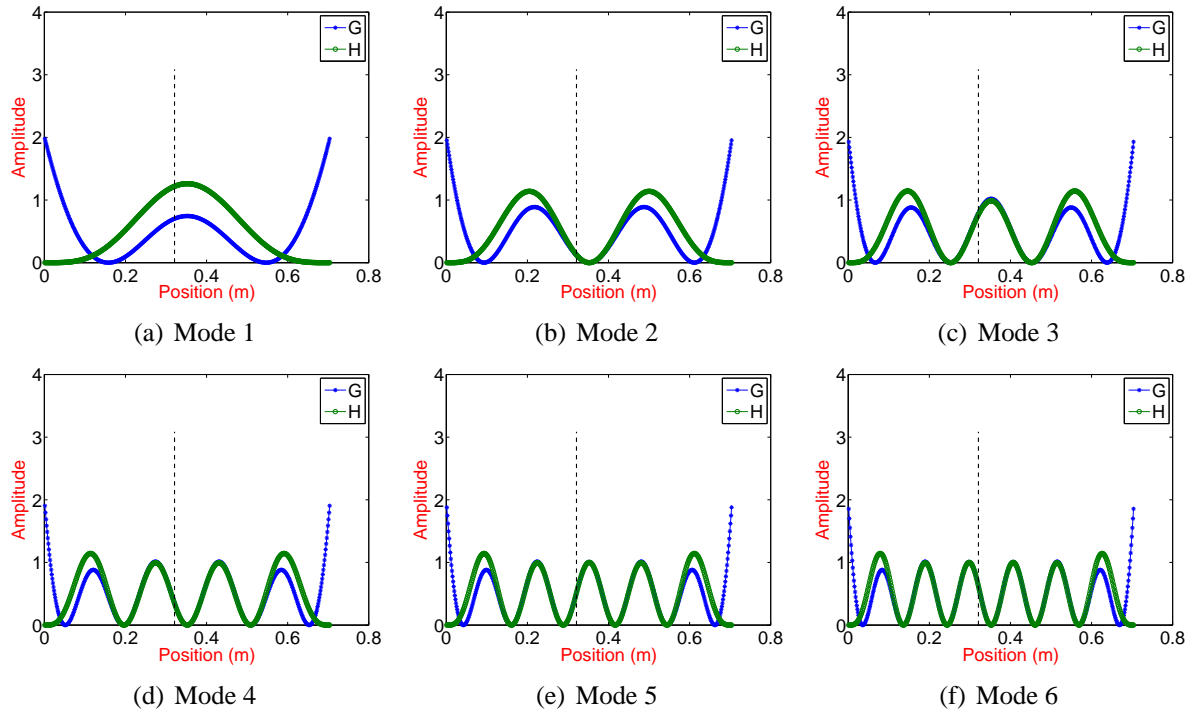


FIGURE 5.22 –  $G$  et  $H$  pour les 6 premiers modes. Le trait noir en pointillé indique la position réelle du défaut.

Nous avons vu dans la partie précédente que la méthode est capable de localiser le défaut en utilisant les variations relatives des fréquences, les déformées modales et leurs deux premières dérivées. Par conséquent, une fois la position de l'endommagement connue, à partir de l'expression (5.22) de  $\frac{\Delta f_n}{f_n}$ , il est possible de résoudre le problème suivant :

$$\begin{pmatrix} G_1(x_0) & -H_1(x_0) \\ G_2(x_0) & -H_2(x_0) \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ G_n(x_0) & -H_n(x_0) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\Delta EI \Delta L}{EI L} \\ \frac{\Delta \mu \Delta L}{\mu L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta f_1/f_1 \\ \Delta f_2/f_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \Delta f_n/f_n \end{pmatrix}$$

où  $n$  est le nombre de modes étudiés.

Les fonctions  $G$  et  $H$  sont obtenues analytiquement en utilisant les déformées et courbures modales de la structure intacte (ou état de référence). Pour estimer les valeurs de  $\Delta EI$  et  $\Delta \mu$ , le problème est mis sous la forme matricielle  $A.X = B$ . Ceci consiste simplement à résoudre un système de  $n$  équations linéaires à 2 inconnues  $\frac{\Delta EI \Delta L}{EI L}$  et  $\frac{\Delta \mu \Delta L}{\mu L}$  au sens des moindres carrés.

L'opérateur \ résout le système de manière à trouver les  $X_i$  qui minimisent la somme des carrés des résidus. Dans ce cas, on aura :

$$S = \text{Argmin} \left( \sum_{i=1}^n (B - A)^2 \right)$$

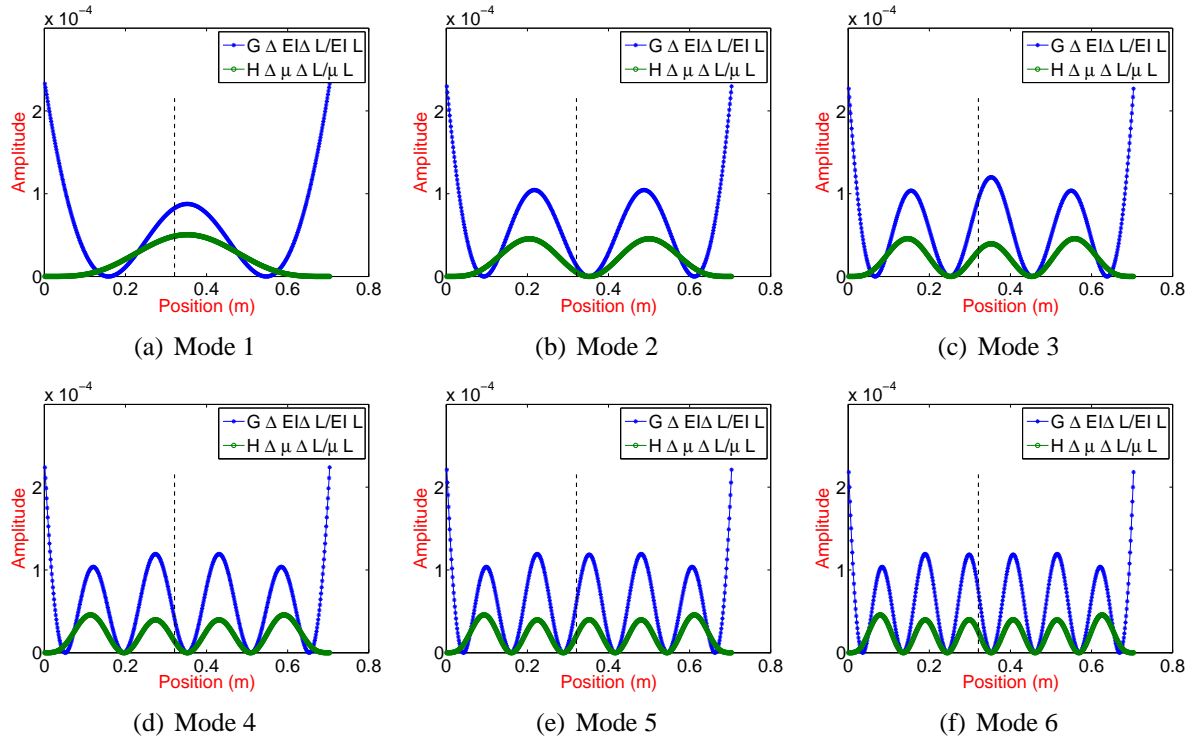


FIGURE 5.23 –  $G_n(x) \frac{\Delta EI \Delta L}{EI L}$  et  $H_n(x) \frac{\Delta \mu \Delta L}{\mu L}$  pour les 6 premiers modes et pour le 4<sup>ème</sup> cas de défaut. Le trait noir en pointillé indique la position réelle du défaut.

Réduction (%)	$\left(\frac{\Delta EI \Delta L}{EI L}\right)^{estimee} \cdot 10^{-2} (\%)$	$\left(\frac{\Delta EI \Delta L}{EI L}\right)^{EF} \cdot 10^{-2} (\%)$	$\left(\frac{\Delta \mu \Delta L}{\mu L}\right)^{estimee} \cdot 10^{-2} (\%)$	$\left(\frac{\Delta \mu \Delta L}{\mu L}\right)^{EF} \cdot 10^{-2} (\%)$
0	0.00	0.00	0.00	0.00
0.5	0.26	0.30	0.05	0.10
1	0.57	0.59	0.16	0.20
1.5	0.83	0.89	0.21	0.30
2	1.20	1.18	0.36	0.40
2.5	1.50	1.46	0.44	0.50
3	1.85	1.75	0.56	0.60
3.5	2.19	2.03	0.66	0.70
4	2.51	2.31	0.72	0.80
4.5	2.84	2.58	0.80	0.90
5	3.22	2.85	0.93	1.00

TABLEAU 5.4 – Variations de rigidité et de masse estimées et obtenues par EF pour une modification autour de  $x_0 = 0.320m$

Le tableau 9.7 reporte les valeurs de variation de masse et de rigidité estimées par l'expression de la variation relative des fréquences et obtenues par EF. On remarque que les valeurs estimées sont assez proches de celles du modèle EF.

Dans les expériences, on cherche souvent à corrélér avec un modèle. Plus généralement, on cherche à vérifier que deux grandeurs  $x$  et  $y$  sont reliées par une loi du type  $y = f(x)$  où  $f$  est une fonction dépendant d'un certain nombre de paramètres. Cependant, pour estimer la corrélation entre l'essai et le calcul, on cherche à savoir dans quelle mesure les données expérimentales s'accordent avec une loi linéaire. Sur la figure 5.24 les droites de régression linéaire entre les valeurs EF et estimées, construites par la méthode des moindres carrés, sont tracées. Cette technique cherche la mi-

minimisation de la somme quadratique des résidus  $e_i$ , c'est-à-dire que  $S = \sum_1^n e_i^2$  soit minimale avec  $e_i = y_i - ax_i - b$ .

On remarque que ces droites s'ajustent bien au nuage de points formé par les valeurs de variation de rigidité 5.24(a) et de masse 5.24(b) de la poutre E-E pour les 10 cas de défauts. La droite de régression est de la forme :  $y = a.x$ . Le coefficient de corrélation  $R$  est très voisin de 1 (Tab. 5.5).

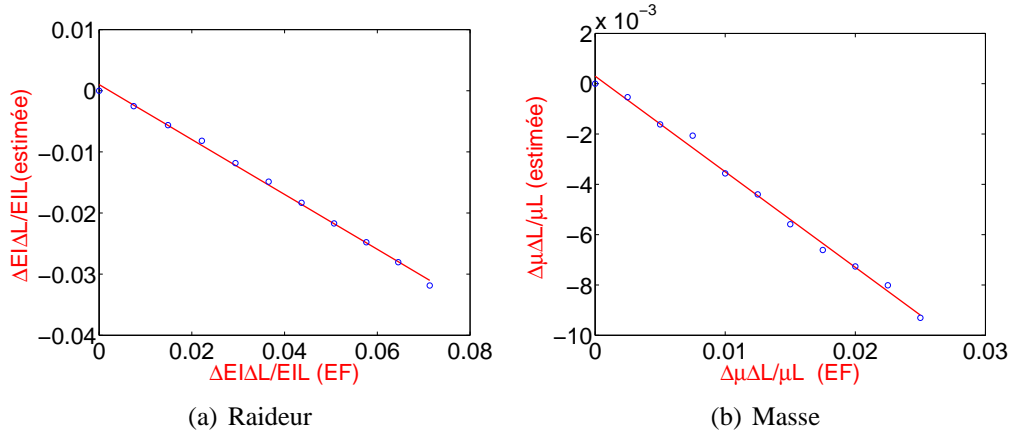


FIGURE 5.24 – Droites de régression linéaire : raideur et masse

Modification	$a$	$R^2$
$\frac{\Delta EI \Delta L}{EIL}$	-1.135	0.9975
$\frac{\Delta \mu \Delta L}{\mu L}$	-0.946	0.9948

TABLEAU 5.5 – Estimation des paramètres  $a$  et  $R^2$

### 5.2.4.4 Problème inverse

Nous faisons maintenant la démarche inverse. Connaissant les pertes de masse et de raideur locales ainsi que la position du défaut  $x_0$ , les  $n$  déformées modales et leurs deux premières dérivées, nous avons calculé les  $n$  variations relatives de fréquences par l'équation (5.34).

$$\frac{\Delta f_n}{f_n} \approx \frac{1}{2} \left[ \frac{\Delta EI \Delta L}{EIL} \frac{L \phi_n''^2(x_0)}{\|\phi_n''\|_2^2} - \frac{\Delta \mu \Delta L}{\mu L} \frac{L \phi_n^2(x_0)}{\|\phi_n\|_2^2} \right] \quad (5.34)$$

Le tableau 5.6 montre les 6 premières fréquences obtenues. Un faible écart est obtenu entre les valeurs estimées et les valeurs identifiées par EF. Nous pouvons dire alors que la méthode est capable de fournir de manière assez précise les fréquences propres d'une structure si le changement de raideur, de masse linéique et la position de ce changement sont prédéterminés.

### 5.2.4.5 Localisation du défaut avec prise en compte de $\Delta T$ , $\Delta \mu(x)$ et $\Delta EI(x)$ et quantification

Pour vérifier l'efficacité de la méthode proposée pour une poutre sous tension subissant des variations simultanées de tension, de rigidité et de masse, nous avons réalisé une étude sur le même modèle



Mode	$\frac{\Delta f_n^{estimee}}{f_n} (10^{-3}\%)$	$\frac{\Delta f_n^{EF}}{f_n} (10^{-3}\%)$
$n^o 1$	3.364	4.059
$n^o 2$	0.868	0.966
$n^o 3$	6.193	6.784
$n^o 4$	2.895	3.011
$n^o 5$	3.846	4.297
$n^o 6$	5.116	5.357

TABLEAU 5.6 – Les variations relatives des 6 premières fréquences propres de la poutre E-E

EF que précédemment (poutre en aluminium E-E). Celle-ci est supposée avoir une entaille et une modification de tension inconnue  $\Delta T$ .

La variation relative de fréquence va s'écrire alors :

$$\frac{\Delta f_n}{f_n} \approx \beta_n \frac{\Delta T}{T} + G_n(x_0) \frac{\Delta EI \Delta L}{EIL} - H_n(x_0) \frac{\Delta \mu \Delta L}{\mu L}$$

$$\text{avec } G_n(x) = \frac{\gamma_n}{2(1 + \gamma_n)} \frac{L \phi_n''^2(x)}{\|\phi_n''\|_2^2}, \quad H_n(x) = \frac{1}{2} \frac{L \phi_n^2(x)}{\|\phi_n\|_2^2}, \quad \beta_n = \frac{1}{2(1 + \gamma_n)} \quad \text{et} \quad \gamma_n = \xi^2 \frac{L^2 \|\phi_n''^2\|_2^2}{\|\phi_n'^2\|_2^2}$$

La tension initiale choisie est  $T = 2000N$  et  $\tilde{T} = 1980N$ , soit  $\frac{\Delta T}{T} = -1\%$ . Pour alléger cette partie, un seul cas de défaut est imposé, soit 2% de réduction de section. Les huit premières fréquences propres calculées sont reportées dans le tableau 5.7.

Mode	Saine	Modifiée	
	$f_n$	$\tilde{f}_n$	$\frac{\Delta f_n}{f_n} (\%)$
$n^o 1$	87.139	87.05838	-0.092
$n^o 2$	228.902	228.7881	-0.050
$n^o 3$	438.865	438.712	-0.035
$n^o 4$	717.766	717.609	-0.022
$n^o 5$	1065.953	1065.772	-0.017
$n^o 6$	1483.546	1483.320	-0.015
$n^o 7$	1970.601	1970.423	-0.009
$n^o 8$	2527.1510	2526.813	-0.013

TABLEAU 5.7 – Les 8 premières fréquences propres et variations relatives correspondantes de la poutre E-E saine et endommagée

Dans ce cas, il y a donc trois inconnues :  $\Delta T$ ,  $\Delta EI$  et  $\Delta \mu$ . Pour localiser la modification, on cherche à minimiser la fonction  $Q_n(x)$  définie dans le paragraphe 5.2.3 qui dépend des  $l$  premières fréquences propres ( $l \geq 4$ ), des déformées modales correspondantes et de leurs deux premières dérivées. La fonction  $Q_n(x)$  et la fonction normalisée  $\hat{Q}_n(x)$  sont tracées sur la figure 5.25 pour différents  $n$ , ( $n = 4, 5, 6, 7, 8$ ).

Deux minima symétriques sont observés. Ceci est dû au fait que les termes sont au carré dans les expressions et à la symétrie du problème, les modes propres et leurs dérivées étant des fonctions symétriques par rapport au centre de la poutre. Un de ces minima se trouve à  $x_0 = 0.320m$  qui est la position réelle du défaut. Il est clair que la localisation devient précise à partir de  $n = 6$ , 6 premiers modes pris en compte. Le tableau 5.8 reporte les valeurs des variations de raideur et de

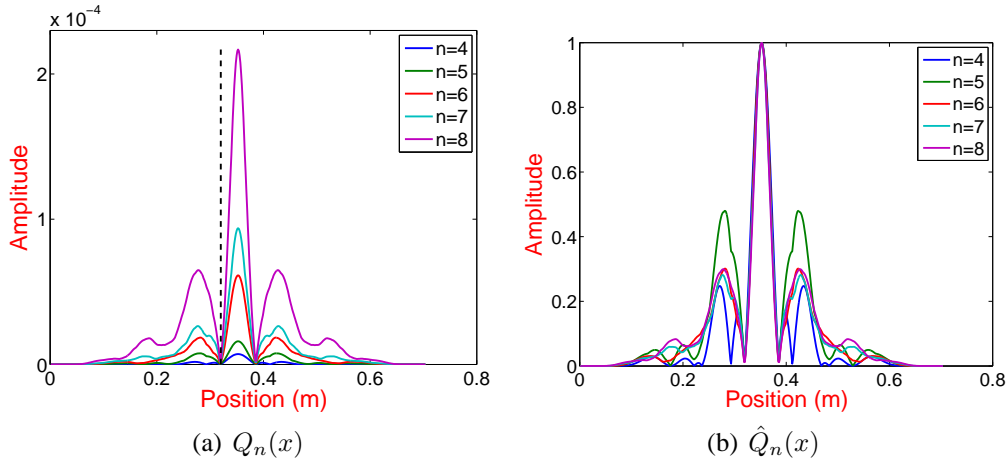


FIGURE 5.25 – Graphes de  $Q_n(x)$  et  $\hat{Q}_n(x)$  de la poutre sous tension avec une modification autour de  $x_0 = 0.320$  m. Le trait noir en pointillé indique la position réelle du défaut.

masse estimées par l'expression de la variation relative des fréquences analytique et celles calculées par EF. Les valeurs sont assez proches, ce qui confirme la performance de la technique et sa capacité à quantifier les modifications.

Modification	Estimation	EF	erreur %
$x_0$ (m)	0.320	0.320	0
$\left(\frac{\Delta EI \Delta L}{EIL}\right)$ (%)	-0.0120	-0.0118	1.7
$\left(\frac{\Delta \mu \Delta L}{\mu L}\right)$ (%)	-0.0037	-0.0040	7.5
$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)$ (%)	-0.991	-1	1

TABEAU 5.8 – Modifications estimées et EF pour une réduction de 2% de section et une variation de tension

*La technique fondée sur les variations relatives des fréquences a pu localiser un défaut sur un modèle numérique de poutre soumis à une perturbation de tension. L'estimation analytique a permis également de quantifier les modifications de masse, de raideur et de tension connaissant la position du défaut, les fréquences propres saines et endommagées, les déformées modales de la poutre saine et les deux premières dérivées correspondantes.*

Nous allons maintenant tester la méthode en supposant que l'état de la poutre est inconnu mais en supposant qu'elle est endommagée. Nous avons alors deux inconnues :  $\frac{\Delta EI \Delta L}{EIL}$  et  $\frac{\Delta \mu \Delta L}{\mu L}$ . Par contre, les fréquences propres utilisées sont celles d'une poutre qui a subi une modification de tension, de masse et de raideur. Le but de cette analyse est d'observer l'allure de la fonction  $Q_n(x)$  avec ( $n \geq 3$ ) estimées avec l'expression prenant en compte seulement un défaut de masse et de raideur (Eq. (5.35)) afin de déterminer si nous obtenons toujours une valeur minimale  $x_0$ .

$$\frac{\Delta f_n}{f_n} \approx G_n(x_0) \frac{\Delta EI \Delta L}{EIL} - H_n(x_0) \frac{\Delta \mu \Delta L}{\mu L} \quad (5.35)$$

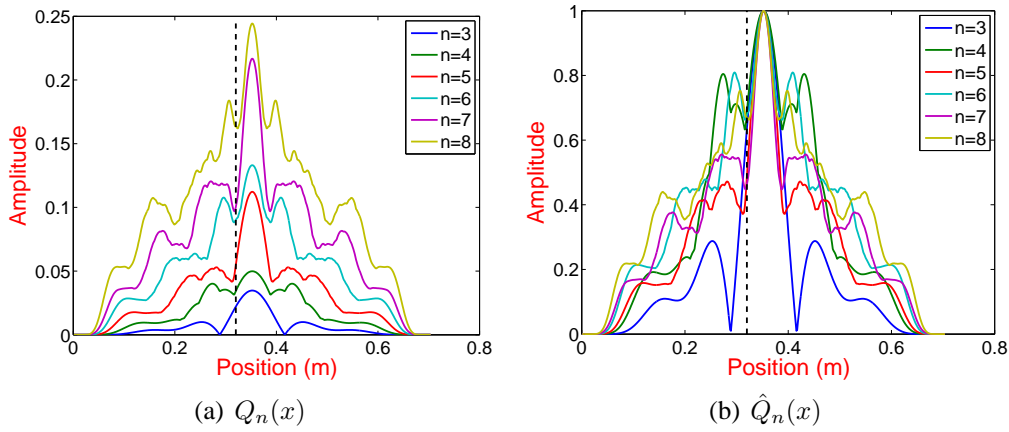


FIGURE 5.26 – Graphes de  $Q_n(x)$  et  $\hat{Q}_n(x)$  de la poutre avec une modification autour de  $x_0 = 0.320m$  et utilisant les fréquences obtenues avec une variation de tension en plus. Le trait noir en pointillé indique la position réelle du défaut.

Sur la figure 5.26, on remarque qu'il n'y a pas de valeurs qui minimisent la fonction  $Q_n(x)$  sauf pour  $n = 3$  où la valeur minimale se trouve en  $x_0 = 0.287m$  qui n'est pas la valeur exacte de l'entaille.

On peut conclure dans ce cas que la poutre n'a pas seulement subi une variation de raideur et de masse, mais qu'une modification de tension peut être présente et donc que l'estimation de la variation relative des fréquences doit prendre en compte la variation de tension.

Pour valider ce résultat, nous avons tenté de quantifier ces modifications en utilisant la position obtenue  $x_0 = 0.287m$  dans l'estimation. Le tableau 5.9 reporte les valeurs estimées et obtenues par EF.

Modification	Estimation	EF	erreur %
position $x_0$ (m)	0.287	0.320	10.3
$\left(\frac{\Delta EI \Delta L}{EIL}\right)$ (%)	0.115	-0.0118	197.46
$\left(\frac{\Delta \mu \Delta L}{\mu L}\right)$ (%)	0.1476	-0.0040	102.71

TABLEAU 5.9 – Modifications estimées et obtenues par EF pour une poutre supposée sans variation de tension

Nous allons maintenant tester la méthode en supposant que la poutre n'est soumise qu'à une perturbation de tension, sans aucun défaut localisé. Soit  $T = 2000N$  la tension initiale et  $\frac{\Delta T}{T} = -1\%$ . Le but de cette étude est d'observer l'allure de la fonction  $Q_n(x)$  estimée pour un défaut de masse et de raideur, et une variation de tension (Eq. (5.28)). La figure 5.27 montre les fonction  $Q_n(x)$  et  $\hat{Q}_n(x)$ .

On voit que les fonctions  $Q_n(x)$  et  $\hat{Q}_n(x)$  possèdent différents minima qui ne se stabilisent pas lorsque  $n$  augmente. Les graphes permettent de conclure qu'il n'y a pas de défaut localisé.

*En résumé, la technique est capable de prévoir si une poutre endommagée a subi également un changement de tension. L'estimation de la variation relative des fréquences utilisant la variation de masse et de rigidité locale a permis de prédire qu'il y a également une perturbation de tension dans la poutre.*

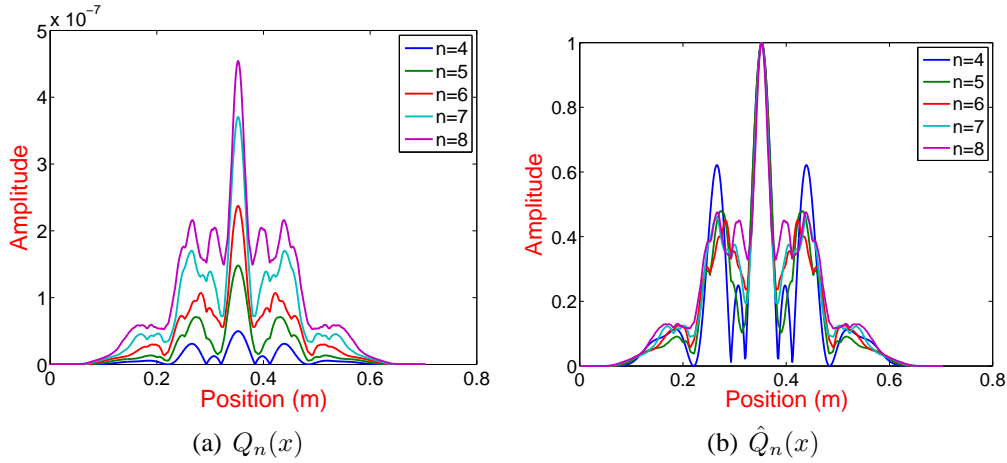


FIGURE 5.27 – Graphes de  $Q_n(x)$  et  $\hat{Q}_n(x)$  de la poutre sous tension sans défaut

### 5.3 Conclusion

Dans ce Chapitre, les résultats trouvés avec la méthode de détection et de localisation utilisant la SVD concordent avec ceux obtenus dans [1]. L'auteur a démontré que la localisation par la méthode utilisant la SVD ne donne pas de bons résultats sur un câble sous tension lorsque le nombre de capteurs n'est pas suffisant. Nous avons réussi, à partir des données numériques, à détecter le défaut en temps (vecteurs singuliers droits) et en espace (vecteurs singuliers gauches) en utilisant une collection de paramètres modaux de la poutre saine et endommagée. Par ailleurs, nous avons montré que les vecteurs gauches obtenus par l'application de la SVD sur une collection de courbures modales localisent le défaut de manière plus précise qu'avec les déformées modales. Il a d'ailleurs été démontré que le changement des courbures modales est plus sensible aux endommagements que le changement des déformées modales. Lorsque la SVD est appliquée sur une collection de vecteurs propres obtenus par des ELB, la localisation est meilleure.

D'autre part, en testant la technique en fonction du nombre de simulations réalisées, nous avons trouvé que la détection en temps reste possible pour un faible nombre d'essais lorsque les données modales utilisées ne sont pas sujettes au bruit. Nous avons démontré en effet, que la présence d'un bruit de mesure élevé nécessite la réalisation d'un nombre d'essais plus important afin de détecter un endommagement. Toutefois, cette technique exige un post-traitement des données issues de chaque essai (identification modale), et est donc coûteuse en temps.

Par ailleurs, la méthode fondée sur les variations relatives des fréquences entre deux états, sain et modifié, a prouvé son efficacité sur des simulations numériques. Celle-ci suppose la connaissance des fréquences propres des deux états, des modes propres et des deux premières dérivées de l'état sain. Lorsque des modifications (de masse et de raideur) de taille  $\Delta L \ll L$  sont localisées autour d'un point d'abscisse  $x_0$ , les estimations analytiques des variations relatives des fréquences propres permettent de construire une fonction positive qui possède un minimum en  $x = x_0$ . La procédure de localisation est fondée sur la recherche du point minimisant cette fonction. Cette technique a réussi à localiser avec précision et à évaluer la sévérité d'endommagement de différentes tailles sur une poutre

E-E soumise ou non à une variation de tension. Ensuite, l'efficacité de la méthode a été vérifiée en quantifiant les modifications de masse et de rigidité que la poutre a subies. En effet, à partir des fréquences propres, des déformées modales analytiques, des deux premières dérivées et de la position du défaut, les variations  $\frac{\Delta EI \Delta L}{EIL}$  et  $\frac{\Delta \mu \Delta L}{\mu L}$  sont estimées avec une bonne précision. Cependant, la robustesse de la méthode reste à juger sur des essais expérimentaux.

# Bibliographie

- [1] Le T.T.H., *Contribution à la détection et à la localisation d'endommagements par des méthodes d'analyse dynamique des modifications structurales d'une poutre avec tension - Application au suivi des câbles du génie civil*, Thèse, ENPC, 2014.
- [2] Kalman D., *A singularly valuable decomposition : The SVD of a matrix*, The College Mathematics Journal, 27(1), pp.2-23, 1996.
- [3] Bergmann M., *Optimisation aérodynamique par réduction de modèle POD et contrôle optimal : application au sillage laminaire d'un cylindre circulaire*, Thèse, INPL, 2004.
- [4] Argoul P., Point N., Cumunel G., T.T.H. Le, Elias R., *Changes in modal properties of a beam with structural modifications*, 19<sup>ème</sup> Colloque, Vibration Shocks and Noise, 2014.
- [5] Argoul P., Point N., Cumunel G., T.T.H. Le, *Detection of structural modifications of an euler-bernoulli beam through modal parameters variation*, 7<sup>th</sup> European Workshop on Structural Health Monitoring, 2014.

## Chapitre 6

# Modèle EF pour le comportement vibratoire d'une poutre trouée

---

**C**<sup>E</sup> CHAPITRE est consacré à la présentation de quelques modèles de défaut (entaille, fissure, trou) pour les poutres. En effet, une fissure, au sens strict du terme, n'est pas le seul type de défaut présent dans une structure, et pour une poutre dans notre cas. Différentes discontinuités de forme comme les entailles et les trous peuvent être également présentes. Par exemple, l'identification de la présence d'un trou est très importante car il affecte énormément l'état de santé d'un élément de structure.

Ce Chapitre s'attache à formuler, par un modèle EF, les matrices de masse et de raideur élémentaires ainsi que les variations de masse et de rigidité d'une poutre E-E trouée en flexion. Dans un premier temps, des rappels sur les différents modèles d'endommagement sont présentés afin de mieux appréhender les phénomènes mis en jeu. Ensuite, des simulations numériques sont réalisées et permettent d'obtenir les matrices de masse et de raideur d'une poutre avec un trou.

---

---

## Plan du Chapitre 6

<b>6.1</b>	<b>Problème mécanique</b>	<b>138</b>
<b>6.2</b>	<b>Modélisation d'un défaut dans une poutre</b>	<b>138</b>
<b>6.3</b>	<b>Modélisation EF d'une poutre d'Euler-Bernoulli avec un trou</b>	<b>141</b>
6.3.1	Equation aux dérivées partielles	141
6.3.2	Calcul de la section et du moment quadratique	142
6.3.3	Fonctions de forme	143
6.3.4	Construction des matrices élémentaires	144
6.3.5	Calcul de $b(x)$ par interpolation de Lagrange	146
<b>6.4</b>	<b>Application numérique</b>	<b>147</b>
6.4.1	Description	147
6.4.2	Matrices élémentaires	148
6.4.3	Pertes de masse et de rigidité dues au trou	149
6.4.4	Analyse modale	150
<b>6.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>150</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>150</b>

---



## 6.1 Problème mécanique

Les techniques de contrôle non destructives sont des techniques très utiles car les informations sont obtenues sans endommager la structure. L'analyse modale en est un exemple car elle est utilisée pour détecter les endommagements dans les structures, en particulier dans le cas de poutres fissurées.

Dans [1], les auteurs ont étudié le comportement dynamique d'une poutre encastree trouee en utilisant une technique d'impact écho comme méthode de détection non destructive.

## 6.2 Modélisation d'un défaut dans une poutre

On définit un défaut dans une structure par un changement des propriétés géométriques ou des propriétés du matériau mais il peut aussi apparaître sous la forme d'un changement au niveau des conditions aux limites (encastrement) et/ou des connections entre les différents éléments. On peut simplifier le problème et dire que les variations du module d'Young  $E$ , simulent une hétérogénéité ou un vieillissement du matériau alors qu'une variation du moment quadratique de la section  $I$ , représente une dégradation ou un changement de section. De plus, pour des matériaux comme le bois par exemple, la densité  $\rho$  peut varier du fait de la dégradation du matériau liée aux insectes.

On peut donc modéliser l'endommagement de plusieurs manières. Dans la plupart des études, il est simulé soit par une diminution locale du module d'Young (et donc de la rigidité de flexion  $EI$ ), soit par un changement abrupte de la section (diminution locale du moment quadratique et donc aussi de  $EI$ ). En général, une réduction de la section d'un élément fini représente une entaille qui peut être appliquée symétriquement de part et d'autre de l'axe neutre, entraînant ainsi une réduction de rigidité locale. L'équation du déplacement  $y(x, t)$  d'une poutre d'Euler-Bernoulli est décrite en détails dans [2]. Les déformées modales d'une poutre de longueur  $L$  sont obtenues par la résolution de l'équation (6.1) :

$$\phi(x) = A_1 \cosh(\lambda x) + A_2 \sinh(\lambda x) + A_3 \cos(\lambda x) + A_4 \sin(\lambda x) \quad (6.1)$$

où  $\lambda = \sqrt[4]{\frac{\omega^2 m}{EI}}$  avec  $\omega$  la pulsation propre de la poutre,  $E$  le module d'Young,  $I$  le moment quadratique de la section et  $m$  la masse linéique. Pour une poutre homogène,  $E$ ,  $I$  et  $m$  sont constants.

Pour une poutre endommagée, Dado [3] propose de diviser la déformée en deux segments (Eq.6.2 et (Eq. (6.3)) : une avant l'endommagement et l'autre après, la continuité étant assurée à la position du défaut par 4 relations de compatibilité.

On a pour  $0 \leq x \leq x_d$

$$\phi_1(x) = A_{11} \cosh(\lambda x) + A_{12} \sinh(\lambda x) + A_{13} \cos(\lambda x) + A_{14} \sin(\lambda x) \quad (6.2)$$

et pour  $x_d \leq x \leq L$

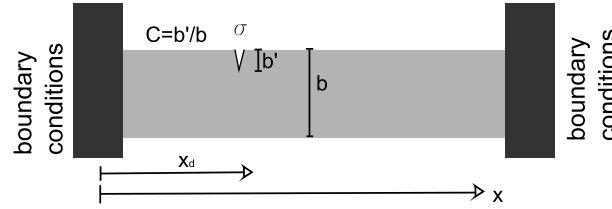


FIGURE 6.1 – Poutre avec une fissure

$$\phi_2(x) = A_{21}\cosh(\lambda x) + A_{22}\sinh(\lambda x) + A_{23}\cos(\lambda x) + A_{24}\sin(\lambda x) \quad (6.3)$$

Les relations de continuité et de discontinuité sont les suivantes :

1. La continuité de la déformée au niveau du défaut :

$$\phi_1(x_d) = \phi_2(x_d)$$

2. La discontinuité de la rotation au niveau du défaut :

$$\frac{\partial \phi_1(x_d)}{\partial x} - \frac{\partial \phi_2(x_d)}{\partial x} = \frac{\sigma C}{1 - C} L \frac{\partial^2 \phi_2(x_d)}{\partial x^2}$$

3. La continuité des moments au niveau du défaut :

$$EI \frac{\partial^2 \phi_1(x_d)}{\partial x^2} = EI \frac{\partial^2 \phi_2(x_d)}{\partial x^2}$$

4. La continuité des contraintes de cisaillement au niveau du défaut :

$$EI \frac{\partial^3 \phi_1(x_d)}{\partial x^3} = EI \frac{\partial^3 \phi_2(x_d)}{\partial x^3}$$

où  $x_d$ ,  $C$  et  $\sigma$  représentent respectivement la position de l'endommagement, son importance et sa largeur caractéristique, avec  $x_d$  mesuré à partir de l'extrémité gauche.

Les coefficients  $A_{1i}$  et  $A_{2i}$  des équations (6.2) et (6.3) sont obtenus en utilisant les relations des conditions aux limites. La procédure consiste à résoudre un système de huit équations linéaires à huit inconnues. Les fréquences propres seront solutions de [4] :

$$\sin(\lambda L)\sinh(\lambda L) + \frac{\sigma C L \lambda}{2(1 - C)} \sin(x_d \lambda) \sin[(x_d - L)\lambda] \sinh(\lambda L) - \sinh(x_d \lambda) \sinh[(x_d - L)\lambda] \sin(\lambda L) = 0 \quad (6.4)$$

Les fréquences propres sont fonction de la largeur caractéristique du défaut  $\sigma$ , de sa position  $x_d$  et de son importance  $C$  [4]. De plus, les modes propres de la poutre endommagée sont obtenus par les équations (6.2), (6.3) et les équations de compatibilité :

$$\phi_1(x) = A_{13} \left( \sin(\lambda x) + \frac{\sin(\lambda L) \sinh[\lambda(L - x_d)] \sinh(\lambda x)}{\sin[\lambda(L - x_d)] \sinh(\lambda L)} \right) \quad (6.5)$$

pour  $0 \leq x \leq x_d$

$$\begin{aligned} \phi_2(x) = A_{13} & \frac{\sin(\lambda L) \left( \cosh[\lambda(x_d + L - x)] - \cosh[\lambda(x_d - L + x)] \right)}{2\sin[\lambda(L - x_d)]\sin(\lambda L)} \\ & + A_{13} \frac{\sinh(\lambda L) \left( \cos[\lambda(x_d - L + x)] - \cos[\lambda(x_d + L - x)] \right)}{2\sin[\lambda(L - x_d)]\sin(\lambda L)} \end{aligned} \quad (6.6)$$

pour  $x_d \leq x \leq L$

Dans la littérature [5], deux approches classiques sont utilisées pour modéliser une fissure dans une poutre :

- Dans la première approche (Fig. 6.2(a)), la fissure est simulée par la modification (généralement la réduction) de la rigidité dans la zone endommagée qui est influencée par la fissure. Les auteurs négligent souvent la perturbation locale de la masse. L'équation vibratoire de la poutre à l'état endommagé s'écrit alors :

$$\boxed{\rho S(x) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI(x) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \right) = p(x, t)} \quad (6.7)$$

où  $EI(x)$  est la rigidité de la poutre à l'état endommagé.

- Dans la deuxième approche (Fig. 6.2(b)), la poutre est séparée en deux parties par la fissure. Deux sections au niveau de la fissure (correspondant aux 2 parties de la poutre) sont liées et un ressort de tension (avec une flexibilité  $c_b$  à l'endroit où se trouve l'endommagement) est utilisé pour modéliser la perte de rigidité due à la fissure.

La réponse vibratoire  $v(x, t)$  doit respecter la continuité ( $x \in [0, L]$ ) de déplacement, de moment et de l'effort tranchant et de discontinuité de la rotation.

Par conséquent, les modes propres  $\phi_n(x)$  doivent respecter les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \phi_n(x_d^+) &= \phi_n(x_d^-), \quad \phi_n''(x_d^+) = \phi_n''(x_d^-), \quad \phi_n'''(x_d^+) = \phi_n'''(x_d^-) \\ \phi_n'(x_d^+) - \phi_n'(x_d^-) &= c_b EI \phi_n''(x_d) \end{aligned}$$

La flexibilité  $c_b$  dépend des caractéristiques du matériau (coefficient de Poisson  $\nu$ ), de la forme, de la taille de fissure et aussi de la forme de la section de la poutre.

Majkut [6][7] a développé les problèmes de modifications structurelles d'une poutre par un ajout de masse ou d'un support élastique. Il a également étudié le modèle d'une poutre fissurée et a utilisé un ressort pour modéliser la fissure. De plus, il a développé la solution du problème inverse qui permet de trouver les masses additionnelles et leur positions sur la poutre à partir d'une certaine fréquence propre désirée après la modification. Cependant, la précision des résultats de quantification dépend



(a) Réduction de la rigidité  $EI$  dans la zone influencée par la fissure (b) Ressort de tension à l'endroit de la fissure

FIGURE 6.2 – Modèles simples pour modéliser la fissure dans la poutre

fortement de la qualité de la mesure de fréquence.

## 6.3 Modélisation EF d'une poutre d'Euler-Bernoulli avec un trou

La détermination de la présence d'un trou dans une structure est très importante. Nous allons alors présenter dans cette section le modèle d'une poutre d'Euler-Bernoulli comportant un trou.

### 6.3.1 Equation aux dérivées partielles

Nous nous intéressons à étudier numériquement, à partir d'un modèle EF, le comportement dynamique d'une poutre bi-encastée homogène avec un trou.

Pour déterminer la rigidité résiduelle d'une poutre comportant un trou, il est nécessaire de calculer le moment quadratique  $I$  d'une poutre rectangulaire saine de section  $b \times h$  ( $b$  la largeur de la poutre et  $h$  son épaisseur) :

$$I = \frac{bh^3}{12}$$

En général, deux cas principaux se posent pour les poutres trouées : le premier cas est celui d'une poutre totalement percée parallèlement au sens de la force alors que pour le second l'axe du trou est perpendiculaire à l'excitation. Quand la poutre possède un trou dont l'axe est parallèle à l'excitation, comme le montre la figure 6.3 [8], la position de l'axe neutre reste la même mais le moment quadratique de la section de la poutre,  $I^*$ , au centre du trou est calculé par l'expression :

$$I^* = \frac{(b - D)h^3}{12}$$

avec  $D$  le diamètre du trou.

En d'autres termes, la perte de rigidité sera proportionnelle au diamètre du trou.

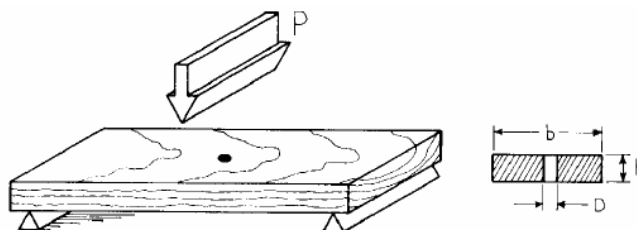


FIGURE 6.3 – Plaque en bois percée avec l'axe du trou parallèle à l'excitation [8]

L'équation aux dérivées partielles décrivant le comportement vibratoire de la poutre, linéaire sans amortissement, s'écrit comme suit :

$$\boxed{\rho S(x) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} + E \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( I(x) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \right) = 0} \quad (6.8)$$

avec les différentes conditions aux bords :

- Cas encastré - encastré :

$$v(0, t) = 0, \quad v(L, t) = 0, \quad \frac{\partial v(0, t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v(L, t)}{\partial x} = 0$$

- Cas appuyé - appuyé :

$$v(0, t) = 0, \quad v(L, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 v(0, t)}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v(L, t)}{\partial x^2} = 0$$

où  $v(x, t)$  est le déplacement de la poutre à l'abscisse  $x$  et à l'instant  $t$ ;  $\rho S(x)$  et  $EI(x)$  sont respectivement la masse linéique et la rigidité en flexion qui sont variables.

En utilisant la méthode de séparation des variables,  $v(x, t) = \phi_k(x)q(t)$ , l'équation différentielle du 4<sup>ème</sup> ordre pour le mode propre  $\phi_k(x)$  s'écrit comme suit :

$$(I(x)\phi_k''(x))'' - \lambda_k^2 S(x)\phi_k(x) = 0 \quad (6.9)$$

avec  $\lambda_k^2 = \frac{\omega_k^2 \cdot \rho}{E}$ ,  $\rho$  et  $E$  étant constants.

Les conditions aux bords sont :

- Cas appuyé - appuyé :  $\phi_k(0) = \phi_k(L) = 0$  et  $\phi_k''(0) = \phi_k''(L) = 0$

- Cas encastré - encastré :  $\phi_k(0) = \phi_k(L) = 0$  et  $\phi_k'(0) = \phi_k'(L) = 0$

### 6.3.2 Calcul de la section et du moment quadratique

Soit  $C$  le cercle formant le trou de centre  $P : [x_d, 0]$ . L'équation du cercle est de la forme  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$  avec  $a$  et  $b$  les coordonnées du centre du cercle et  $R$  son rayon.

Dans notre cas, soit  $(O, x, y)$  le repère orthonormé comme indiqué sur la figure 6.4, l'équation du cercle en fonction de  $x$  va s'écrire :

$$y(x)^2 = R^2 - (x - x_d)^2$$

On a alors en chaque point  $x$  sur la longueur de l'élément endommagé, la section  $S(x)$  et le moment

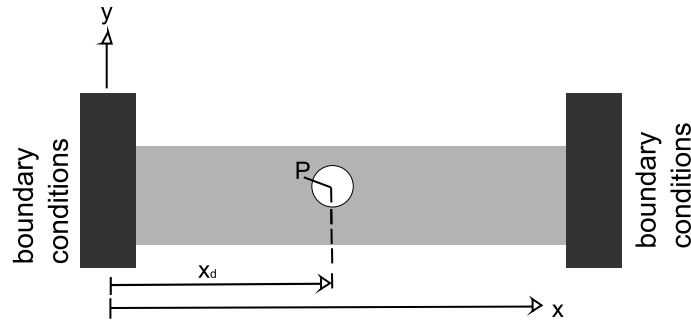


FIGURE 6.4 – Poutre percée avec l'axe du trou parallèle à l'excitation

quadratique  $I(x)$  qui valent :

$$S(x) = [b - 2y(x)] \cdot h \quad (6.10)$$

$$I(x) = [b - 2y(x)] \cdot \frac{h^3}{12} \quad (6.11)$$

pour  $x_d - R \leq x \leq x_d + R$

et  $I(x) = I$  et  $S(x) = S$  (constants) pour  $x > x_d + R$  et  $x < x_d - R$ .

Nous allons maintenant illustrer le cas de la poutre bi-encastrée trouée. Une discrétisation éléments finis de la poutre avec les hypothèses d'Euler-Bernoulli est faite : chaque élément de la poutre possède deux nœuds  $i$  et  $j$  comportant deux degrés de liberté par nœud, un déplacement vertical et une rotation. Les matrices de raideur et de masse élémentaires sont donc de dimension  $4 \times 4$ .

### 6.3.3 Fonctions de forme

Pour un problème de poutre en flexion, dont la déformée est un polynôme de degré trois, la fonction d'interpolation suivante est proposée :

$$v(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \quad (6.12)$$

Les constantes  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  et  $a_3$  sont obtenues en fonction de la valeur des degrés de liberté aux nœuds 1 et 2, soient  $(v_1, \theta_1)$  et  $(v_2, \theta_2)$  :

$$v(0) = v_1, v(l) = v_2$$

$$v'(0) = \theta_1, v'(l) = \theta_2$$

Ces quatre conditions permettent d'écrire le système de quatre équations à quatre inconnues permettant de calculer les constantes  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  et  $a_3$ . Sous forme matricielle, nous voyons apparaître les fonctions de formes  $\Phi$  :

$$\begin{pmatrix} v(x, t) \\ \theta(x, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3} & x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} & \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3} & -\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \\ -\frac{6x}{l^2} + \frac{6x^2}{l^3} & 1 - \frac{4x}{l} + \frac{3x^2}{l^2} & \frac{6x}{l^2} - \frac{6x^2}{l^3} & -\frac{2x}{l} + \frac{3x^2}{l^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1(t) \\ \theta_1(t) \\ v_2(t) \\ \theta_2(t) \end{pmatrix}$$

Soient :

$$\Phi_{11}(x) = 1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3}$$

$$\Phi_{12}(x) = x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}$$

$$\Phi_{13}(x) = \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3}$$

$$\Phi_{14}(x) = -\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}$$

$$\text{d'où } v(x, t) = \Phi_{11}(x)v_1(t) + \Phi_{12}(x)\theta_1(t) + \Phi_{13}(x)v_2(t) + \Phi_{14}(x)\theta_2(t).$$

Pour plus de détails, se référer à [9].

### 6.3.4 Construction des matrices élémentaires

La forme intégrale du Principe des Travaux Virtuels (PTV) [10], nous donne :

$$\int_{\Omega} \rho \vec{v} \cdot \delta \vec{v} dV = - \int_{\Omega} EI \varepsilon \cdot \delta \varepsilon dV + \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \delta \vec{v} dV + \int_S \vec{T} \cdot \delta \vec{v} dS \quad (6.13)$$

avec  $\vec{v}$  le champ des déplacements,  $\delta \vec{v}$  le champ des déplacements virtuels et  $\ddot{\vec{v}}$  le champ des accélérations.

Sur chaque élément, nous utilisons l'approximation nodale pour exprimer  $\vec{v}$  et  $\delta \vec{v}$ . Ainsi, le produit scalaire s'écrit maintenant :

$$\int_{\Omega} \rho \vec{v} \cdot \delta \vec{v} dV = \delta v^T M_e \ddot{v} \quad (6.14)$$

avec  $M_{ij}$  la matrice élémentaire définie par :

$$M_{ij} = \int_l \rho S \Phi_i(x) \Phi_j(x) dx \quad (6.15)$$

$$\text{et } \ddot{v}(x, t) = \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = \Phi_{11}(x)\ddot{v}_1(t) + \Phi_{12}(x)\ddot{\theta}_1(t) + \Phi_{13}(x)\ddot{v}_2(t) + \Phi_{14}(x)\ddot{\theta}_2(t)$$

Par ailleurs, le calcul de la déformation repose sur l'hypothèse d'Euler-Bernoulli :

$$[\varepsilon] = \varepsilon_{11} = -y \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \quad (6.16)$$

et l'écriture sous forme matricielle donne :

$$[\varepsilon] = -y \begin{bmatrix} -\frac{6}{l^2} + \frac{12x}{l^3} & -\frac{4}{l} + \frac{6x}{l^2} & \frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l} & -\frac{2}{l} + \frac{6x}{l^2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

La relation de comportement est réduite à :

$$[\sigma] = E[\varepsilon] \quad (6.17)$$

Les termes de la matrice de raideur élémentaire se calculent à partir de l'expression :

$$K_{ij} = \int_l EI \Phi_i''(x) \Phi_j''(x) dx \quad (6.18)$$

Dans le cas d'une poutre saine linéaire, la section et le moment quadratique sont constants le long de la poutre. Les différents termes  $K_{ij}$  ( $i, j = 1$  à  $4$ ) de la matrice de rigidité élémentaire se calculent par l'expression :

$$K_{ij} = EI \int_0^l \Phi_{1i}''(x) \Phi_{1j}''(x) dx \quad (6.19)$$

avec  $\Phi_{1i}''(x)$  et  $\Phi_{1j}''(x)$  les dérivées secondes des fonctions de forme  $n^\circ i$  et  $n^\circ j$  et  $l$  la longueur de l'élément.

La matrice de raideur élémentaire de la poutre saine est donc :

$$K_e = \frac{EI}{l^3} \begin{pmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{pmatrix}$$

et les différents termes  $M_{ij}$  ( $i, j = 1$  à  $4$ ) de la matrice de masse élémentaire se calculent par l'expression :

$$M_{ij} = \rho S \int_0^l \Phi_{1i}(x) \Phi_{1j}(x) dx \quad (6.20)$$

avec  $\Phi_{1i}(x)$  et  $\Phi_{1j}(x)$  les fonctions de forme  $n^\circ i$  et  $n^\circ j$ .

La matrice de masse élémentaire de la poutre saine est donc :

$$M_e = \frac{\rho S}{420} \begin{pmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{pmatrix}$$

Pour le cas endommagé, nous considérons un trou de diamètre  $D$  défini sur une seule maille, comme le montre la figure 6.5. Le diamètre du trou est donc inférieur ou égal à la taille de l'élément.



Le moment quadratique et la section sont constants sur les éléments sains de la poutre,  $I = \frac{bh^3}{12}$  et  $S = b \times h$ , alors qu'ils sont variables sur la longueur de l'élément de la poutre troué.

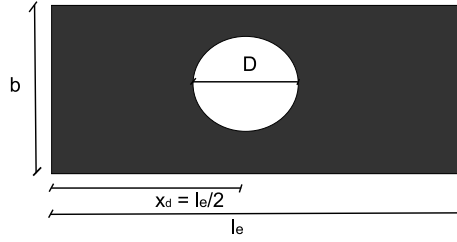


FIGURE 6.5 – Élément fini avec un trou

La matrice de raideur pour l'élément de la poutre troué sera calculée par :

$$K_{ij}^* = EI \int_0^{x_d-R} \Phi_i''(x) \Phi_j''(x) dx + E \int_{x_d-R}^{x_d+R} I(x) \Phi_i''(x) \Phi_j''(x) dx + EI \int_{x_d+R}^{l_e} \Phi_i''(x) \Phi_j''(x) dx \quad (6.21)$$

où  $I(x)$  est le moment quadratique variable, suivant  $x$ , de l'élément endommagé défini par la formule (6.22),  $x_d$  est la position du centre du trou choisie égale à  $\frac{l_e}{2}$  et  $R$  son rayon.

$$I(x) = \frac{b(x) \times h^3}{12} \quad (6.22)$$

$b(x)$  étant la largeur en tout point  $x$  de l'élément de la poutre troué.

La matrice de masse pour l'élément de la poutre troué sera calculée par :

$$M_{ij}^* = \rho S \int_0^{x_d-R} \Phi_i(x) \Phi_j(x) dx + \rho \int_{x_d-R}^{x_d+R} S(x) \Phi_i(x) \Phi_j(x) dx + \rho S \int_{x_d+R}^{l_e} \Phi_i(x) \Phi_j(x) dx \quad (6.23)$$

où  $S(x)$  est la section variable suivant  $x$  de l'élément endommagé définie par :

$$S(x) = b(x) \times h$$

### 6.3.5 Calcul de $b(x)$ par interpolation de Lagrange

Afin de simplifier le calcul de l'intégrale, les interpolations de Lagrange [11] ont été utilisées pour évaluer l'expression de  $b(x)$ .

Les polynômes  $h_i(x)$ , pour  $i = 0 \dots n$ , sont définies par :

$$h_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)} \quad (6.24)$$

Le numérateur de chacun de ces polynômes est un produit de  $n$  termes  $(x - x_k)$  et est donc un polynôme de degré  $n$ . Le dénominateur est une constante. Par exemple, pour 3 réels donnés distincts,

on a :

$$h_0(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} \quad (6.25)$$

$$h_1(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_0)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \quad (6.26)$$

$$h_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \quad (6.27)$$

d'où :

$$b(x) = h_0(x) \times b(x_0) + h_1(x) \times b(x_1) + h_2(x) \times b(x_2) \quad (6.28)$$

Pour la construction des matrices globales, il suffit de faire l'assemblage des matrices de raideur et de masse élémentaires en fonction de la table de connectivité.

## 6.4 Application numérique

### 6.4.1 Description

La modélisation EF a été implémentée sous Matlab. La poutre de section saine,  $S = b \times h$ , dont les caractéristiques sont répertoriées dans le tableau 6.1 est discrétisée en 50 éléments finis, le modèle comprend donc 51 nœuds. Ce choix est adopté pour que la longueur de l'élément ne soit pas trop petite, soit  $l = 14.1mm$ , de manière à avoir  $D$  le diamètre du trou inférieur ou égal à la taille de l'élément.

<b>Longueur (mm)</b>	705
<b>Largeur (mm)</b>	40
<b>Epaisseur (mm)</b>	8.1
<b>Section (mm<sup>2</sup>)</b>	324
<b>Inertie (mm<sup>4</sup>)</b>	1771.5
<b>Module d'Young (N/m<sup>2</sup>)</b>	$61.7 \cdot 10^9$
<b>Masse volumique (kg/m<sup>3</sup>)</b>	2791

TABLEAU 6.1 – Caractéristiques de la poutre E-E

Le trou se trouve sur l'élément 23 du maillage. Pour une configuration de 20 capteurs, les abscisses des points de discrétisation de la poutre ne correspondant pas tout à fait à celles des capteurs, une interpolation par spline est alors effectuée. Pour tous les cas, le trou se trouve au niveau du capteur n°9. Le diamètre du trou varie de 2mm à 10mm avec un pas de 2mm. Le trou se trouve sur un seul élément. Ce choix de diamètre est imposé du fait de l'expérimentation qui sera présentée aux Chapitres 7 et 9. Le tableau 6.2 montre les caractéristiques de la poutre avec les trous de différents diamètres.

Cas	Diamètre	Largeur (b)	Inertie élémentaire	Raideur élémentaire	Variation de raideur locale	Variation de masse locale
	$D(mm)$	$b(mm)$	$I(mm^5)$	$EI(GPa.m^5)$	$\frac{\Delta EI}{EI}(\%)$	$\frac{\Delta \mu(\%)}{\mu}$
0	0	40	$2.498 \cdot 10^4$	$1,544 \cdot 10^6$	0	0
1	2	38	$2.486 \cdot 10^4$	$1,536 \cdot 10^6$	0,473	0,473
2	4	36	$2.450 \cdot 10^4$	$1,514 \cdot 10^6$	1,891	1,891
3	6	34	$2.392 \cdot 10^4$	$1,478 \cdot 10^6$	4,261	4,261
4	8	32	$2.309 \cdot 10^4$	$1,427 \cdot 10^6$	7,565	7,565
5	10	30	$2.203 \cdot 10^4$	$1,361 \cdot 10^6$	11,820	11,820

TABLEAU 6.2 – Caractéristiques des 5 cas simulés

## 6.4.2 Matrices élémentaires

Les matrices de masse et de raideur élémentaires des éléments sains du maillage sont celles définies en (6.23) et (6.21) alors que les matrices élémentaires de l'élément troué sont obtenues par les expressions définies en 6.3.4.

### Détermination de la largeur $b(x)$ de l'élément endommagé

Dans notre cas, pour déterminer l'expression de  $b(x)$ , 3 points sont connus :

- $x_0 = \frac{l}{2} - R \quad b(x) = b;$
- $x_1 = \frac{l}{2} \quad b(x) = b - 2R;$
- $x_2 = \frac{l}{2} + R \quad b(x) = b;$

Le calcul de  $b(x)$  est défini par :

$$b(x) = h_0(x) \times b(x_0) + h_1(x) \times b(x_1) + h_2(x) \times b(x_2) \quad (6.29)$$

Ci-dessous des exemples de matrices élémentaires saines et endommagées obtenues.

### Matrices élémentaires de raideur et de masse saine

$$K_e = \frac{EI}{l} \begin{pmatrix} 0.06 & 0.43 & -0.06 & 0.43 \\ 0.43 & 4.00 & -0.43 & 2.00 \\ -0.06 & -0.43 & 0.06 & -0.43 \\ 0.43 & 2.00 & -0.43 & 4.00 \end{pmatrix} \quad M_e = \rho S l \begin{pmatrix} 0.37 & 0.73 & 0.13 & -0.43 \\ 0.73 & 1.88 & 0.43 & -1.41 \\ 0.13 & 0.43 & 0.37 & -0.73 \\ -0.43 & -1.41 & -0.73 & 1.88 \end{pmatrix}$$

Matrice élémentaires de raideur et de masse pour un trou de 6mm de diamètre

$$K_e^* = \frac{EI}{l} \begin{pmatrix} 0.06 & 0.42 & -0.06 & 0.42 \\ 0.42 & 3.94 & -0.42 & 2.03 \\ -0.06 & -0.42 & 0.06 & -0.42 \\ 0.42 & 2.03 & -0.42 & 3.94 \end{pmatrix} \quad M_e^* = \rho S l \begin{pmatrix} 0.36 & 0.70 & 0.12 & -0.40 \\ 0.70 & 1.77 & 0.40 & -1.30 \\ 0.12 & 0.40 & 0.36 & -0.70 \\ -0.40 & -1.30 & -0.70 & 1.77 \end{pmatrix}$$

### 6.4.3 Pertes de masse et de rigidité dues au trou

La perte de rigidité  $\Delta EI$  est égale au rapport entre la rigidité de la poutre intacte et celle lorsque la poutre est percée.

$$\Delta EI(\%) = \frac{EI - EI^*}{EI} = \frac{I - I^*}{I} \times 100 \quad (6.30)$$

$I^*$  est le moment quadratique d'un élément de la poutre endommagé.

$$I^* = I \times (l - D) + \int_{\frac{l}{2}-R}^{\frac{l}{2}+R} I(x) dx$$

De la même manière, la perte de masse  $\Delta M$  est égale au rapport entre la masse de la poutre intacte et celle lorsque la poutre est trouée.

$$\Delta M(\%) = \frac{\rho S - \rho S^*}{\rho S} = \frac{S - S^*}{S} \times 100 \quad (6.31)$$

$S^*$  étant la section de l'élément de la poutre endommagé :

$$S^* = S \times (l - D) + \int_{\frac{l}{2}-R}^{\frac{l}{2}+R} S(x) dx$$

On peut remarquer à partir des expressions (6.30) et (6.31), que les pertes de rigidité et de masse sont égales en pourcentage puisque le trou affecte la largeur de la poutre et non son épaisseur.

La masse d'un élément de la poutre sain vaut :  $\rho \times S \times l = 12.75$  g alors que la masse d'un élément troué dépend du diamètre du trou (tableau 6.3) .

Cas	Diamètre	Masse locale
	$D(mm)$	$M_{locale}(g)$
0	0	12.75
1	2	12.69
2	4	12.51
3	6	12.21
4	8	11.79
5	10	11.24

TABLEAU 6.3 – Masse d'un élément troué pour les 5 cas simulés

### 6.4.4 Analyse modale

Les paramètres modaux d'un mode  $k$  sont identifiés par simple résolution de l'équation aux valeurs propres :

$$(K - \omega_k^2 M)\phi_k = 0$$

Les quatre premières fréquences propres du modèle EF de la poutre saine et endommagée, par un trou, et les variations relatives correspondantes sont fournies dans le tableau 6.4. On remarque bien que même, pour l'état le plus sévère (un trou de 10mm de diamètre équivalent à 25% de la largeur de la poutre), une faible variation de fréquence est provoquée.

$$f_k = \frac{(\beta_k L)^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{\rho S L^4}} \quad (6.32)$$

	Fréquences (Hz)			
	1 <sup>ère</sup>	2 <sup>ème</sup>	3 <sup>ème</sup>	4 <sup>ème</sup>
<b>Poutre intacte</b>	78.828	217.292	425.980	704.170
<b>Cas 1</b>	78.831	217.293	425.979	704.170
Changement (%)	0.0049	0.0005	-0.0002	-0.0000
<b>Cas 2</b>	78.843	217.297	425.977	704.166
Changement (%)	0.0193	0.0019	-0.0009	-0.0006
<b>Cas 3</b>	78.861	217.300	425.970	704.150
Changement (%)	0.0423	0.0035	-0.0025	-0.0027
<b>Cas 4</b>	78.885	217.302	425.956	704.108
Changement (%)	0.0724	0.0044	-0.0059	-0.0087
<b>Cas 5</b>	78.912	217.298	425.929	704.014
Changement (%)	0.1069	0.0028	-0.0122	-0.0221

TABLEAU 6.4 – Fréquences propres et variations relatives pour les 5 niveaux d'endommagement

D'après la relation (6.32), on peut effectivement établir qu'une variation de masse linéique ( $\rho S$ ) du système engendre une variation  $\Delta f_k$  de la fréquence de résonance d'autant plus faible que la masse linéique est grande. Inversement, lorsque la rigidité de la structure ( $EI$ ) diminue, les fréquences propres diminuent.

## 6.5 Conclusion

Dans cette section, le calcul EF des matrices élémentaires de masse  $M_e$  et de raideur  $K_e$  d'une poutre comportant un trou a été présenté afin de pouvoir estimer les pertes  $\Delta EI$  et  $\Delta M$  locales. Cette poutre sera étudiée expérimentalement dans les Chapitres 7 et 9. Nous avons aussi vu que l'utilisation des fréquences propres ne permet pas de détecter directement un trou dans une poutre. Nous n'avons pas appliqué dans ce mémoire les différentes méthodes de détection d'endommagement sur ce modèle numérique de la poutre endommagée puisque celles-ci ont été présentées de façon détaillée dans le Chapitre 4 pour le cas d'une entaille.

# Bibliographie

- [1] Cam E., Orhan S., Luy M., Arslan H., EREL S., *Defect analysis in different alloying brass beams using non-destructive technique*, 4th International Conference on Electrical and Electronics Engineering, ELECO, Turkey, 2005.
- [2] Rao S.S., *Mechanical vibrations*, Addison-Wesley, 1995.
- [3] Dado M., *A comprehensive crack identification algorithm for beams under different end conditions*, Applied Acoustics, 51, pp. 381-398, 1997.
- [4] Poudel P.U., Fu G., Ye J., *Structural damage detection using digital video imaging and wavelet transformation*, Journal of Sound and Vibration, 286(4-5), pp. 869-895, 2005.
- [5] Friswell M.I., Penny J.E.T., *Crack modeling for structural health monitoring*, Structural Health Monitoring, 1(2), 139-148, 2002.
- [6] Majkut L., *Eigenvalue based inverse model of beam for structural modification and diagnostics. Part I : Theoretical formulation*, Latin American Journal of Solids and Structures, 7, pp. 423-436. 2010.
- [7] Majkut L., *Eigenvalue based inverse model of beam for structural modification and diagnostics. Part II : Examples of using*, Latin American Journal of Solids and Structures, 7, pp. 437-456 2010.
- [8] Eckelman C.A. *Effect of holes on the bending strength of wood and particleboard parts*, Agricultural Experiment Station, Purdue University, 1975
- [9] Delaplace A., Gatuingt F., Ragueneau F., *Mécanique des structures Résistance des matériaux*, Dunod, Paris, 2008.
- [10] Hervé O., *Méthode des éléments finis*, Centrales Nantes, 2008.
- [11] *Interpolation polynomiale*, Cours UFR maths, Université de Rennes 1.

## Chapitre 7

# Etude expérimentale d'une poutre bi-encastree

---

**C**<sup>E CHAPITRE</sup> *aborde l'application des méthodes de détection et de localisation d'endommagement présentées lors du Chapitre 4 sur une poutre encastree-encastree en aluminium. Le début du Chapitre est consacré à la présentation du dispositif expérimental.*

*Le contrôle de santé des structures repose sur quatre niveaux essentiels. Le premier niveau est le choix, lorsque cela est possible, de la source d'excitation. Le second niveau concerne l'instrumentation des capteurs et l'acquisition des données. Le troisième niveau fait appel aux méthodes d'identification modale pour traiter les signaux mesurés pour obtenir les paramètres modaux (fréquences propres, amortissements modaux et déformées modales). Enfin, le dernier niveau est celui de l'analyse vibratoire et de la détection de modifications structurales ainsi que de la confrontation théorie/expérience. Ces quatre points seront traités dans ce Chapitre pour notre cas d'étude (poutre encastree-encastree en aluminium).*

---

---

## Plan du Chapitre 7

---

<b>7.1</b>	<b>Description de l'expérience . . . . .</b>	<b>154</b>
7.1.1	Identification du module d'élasticité . . . . .	154
7.1.2	Réalisation de l'encastrement . . . . .	155
7.1.3	Source d'excitation . . . . .	155
7.1.4	Description des capteurs . . . . .	156
7.1.5	Conditions d'acquisition des signaux . . . . .	158
7.1.6	Cas d'endommagement réalisés . . . . .	159
<b>7.2</b>	<b>Évaluation du niveau des bruits parasites . . . . .</b>	<b>160</b>
<b>7.3</b>	<b>Nombre optimal de capteurs selon Sazonov et al. [2] . . . . .</b>	<b>161</b>
<b>7.4</b>	<b>Analyse modale expérimentale de la poutre E-E saine . . . . .</b>	<b>162</b>
7.4.1	Analyse spectrale et étude de dispersion . . . . .	162
7.4.2	Identification modale par la TO, COSMAD et la SOD . . . . .	164
<b>7.5</b>	<b>Interprétation des résultats obtenus par la TO . . . . .</b>	<b>169</b>
<b>7.6</b>	<b>Détection d'endommagement par les méthodes utilisant les paramètres modaux</b>	<b>175</b>
<b>7.7</b>	<b>Détection d'endommagement par les méthodes utilisant la courbure modale .</b>	<b>178</b>
7.7.1	Courbure modale . . . . .	179
7.7.2	Courbure de Flexibilité . . . . .	179
7.7.3	Energie de déformation modale . . . . .	180
7.7.4	Etude mode par mode . . . . .	180
<b>7.8</b>	<b>Détection d'une modification structurale à partir du filtrage modal . . . . .</b>	<b>182</b>
7.8.1	Détection à partir d'une série d'essais sur la poutre saine . . . . .	184
7.8.2	Détection à partir d'une série d'essais de l'état sain et des états endommagés	184
<b>7.9</b>	<b>Application de méthodes fondées sur la courbure de TF . . . . .</b>	<b>185</b>
<b>7.10</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>187</b>
	<b>Bibliographie . . . . .</b>	<b>188</b>

---



## 7.1 Description de l'expérience

Dans cette partie, nous avons réalisé une analyse modale expérimentale sur une poutre en aluminium encastrée-encastrée (E-E) illustrée sur la figure 7.1 afin de caractériser l'état de référence, puis nous avons réalisé différents cas de défauts. Les dimensions de la poutre sont répertoriées dans le tableau 7.1.

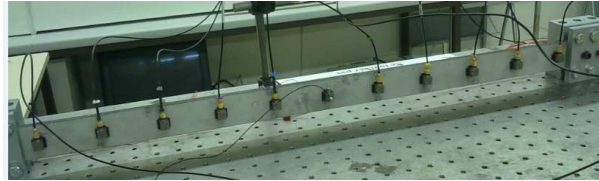


FIGURE 7.1 – Photo de la poutre

<b>Longueur (<math>m</math>)</b>	0.705
<b>Largeur (<math>m</math>)</b>	0.04
<b>Epaisseur (<math>m</math>)</b>	0.0081
<b>Section (<math>m^2</math>)</b>	$0.324 \cdot 10^{-3}$
<b>Inertie (<math>m^4</math>)</b>	$1.7715 \cdot 10^{-9}$
<b>Masse volumique (<math>kg/m^3</math>)</b>	2791

TABLEAU 7.1 – Caractéristiques de la poutre E-E

### 7.1.1 Identification du module d'élasticité

Le module d'Young de la poutre en aluminium a été calculé à partir des fréquences de résonance identifiées sur la poutre avec des conditions aux limites libre-libre (L-L), ceci pour éviter toute perturbation provoquée par l'encastrement. Il est avéré que les meilleurs résultats pour le calcul du module d'Young sont obtenus pour des conditions aux limites libre-libre car celles-ci sont plus facilement réalisables expérimentalement. La poutre est excitée en flexion à l'aide d'un marteau d'impact. La réponse est issue d'un seul accéléromètre.

Le module d'Young de la poutre est obtenu à partir de l'expression 7.1 avec les coefficients  $\beta_k L$  théoriques pour le cas L-L.

$$E = \frac{\rho S}{I} \left( \frac{2\pi f_k}{(\beta_k L)^2} \right)^2 \quad (7.1)$$

$\rho$  étant la masse volumique expérimentale égale à  $2791 kg \cdot m^{-3}$ ,  $I = \frac{bh^3}{12} = 1771.5 mm^4$  le moment quadratique et  $f_k$  la fréquence propre correspondant au mode  $k$ .

Le tableau 7.2 donne les modules d'Young obtenus pour les trois premières fréquences propres.

Le module d'Young obtenu a une valeur moyenne égale à  $E = 61.68 GPa$  avec l'écart-type  $\frac{\delta\sigma}{\sigma} = 0.16\%$ .

Mode	Fréquence (Hz)	E (GPa)
$n^{\circ} 1$	56.73	61.848
$n^{\circ} 2$	156.24	61.677
$n^{\circ} 3$	306.04	61.584

TABLEAU 7.2 – Fréquences expérimentales de la poutre L-L intacte et module d'Young correspondant

### 7.1.2 Réalisation de l'encastrement

Les CL étant un des paramètres importants pour la validité d'un modèle numérique étudié, notamment car elles influencent sensiblement les fréquences propres de la structure, un soin particulier a donc été pris pour mettre en œuvre l'encastrement de la poutre.

L'encastrement a été réalisé de la manière suivante :

- La poutre est insérée entre les deux parties constituant l'encastrement, qui sont ensuite serrées. La partie de la poutre encastree (10cm de longueur) est supérieure à deux fois la plus grande dimension de la section de la poutre (4cm de largeur).
- L'encastrement a été réalisée à partir de deux blocs d'acier qui ont également été usinées sur deux faces perpendiculaires : l'une en appui sur le marbre et l'autre en contact avec la poutre.

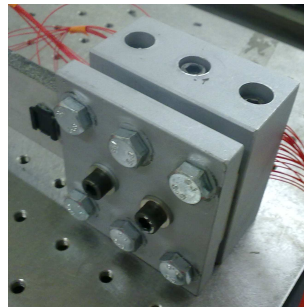


FIGURE 7.2 – Photo d'un encastrement

Deux vis au centre d'un encastrement traversent également la poutre et permettent ainsi de mieux bloquer le degré de liberté de translation axiale au niveau de l'encastrement (Fig. 7.2). Le nombre de vis assez important permet d'avoir un serrage plus homogène au niveau de l'encastrement. Un préserrage est effectué au niveau des vis centrales puis l'ensemble des vis est serré progressivement en quinconce. Ainsi, une répartition des efforts plus uniforme est obtenue au niveau de l'encastrement.

### 7.1.3 Source d'excitation

Dans l'étude expérimentale d'un problème vibratoire, il convient de s'assurer des conditions dans lesquelles les mesures sont effectuées. L'une de ces conditions est la façon dont la structure est excitée. Ainsi, l'estimation des caractéristiques modales d'une structure nécessite d'avoir une source d'excitation susceptible de les exciter. Les sources d'excitation peuvent être classées de plusieurs manières. La typologie classique des essais dynamiques consiste à séparer les excitations dites de choc ou d'impact des excitations dites vibratoires. Les excitations vibratoires impliquent, l'application répétitive

d'efforts sur un nombre assez important de périodes naturelles de la structure. Les chocs ou impacts sont par contre caractérisés par des événements transitoires de courte période.

Au cours de toutes les expériences réalisées, la poutre est excitée par un pot vibrant électrodynamique ModalShops de type **K2004E01** (Fig. 7.3) positionné au point d'abscisse  $x_j = 578mm$  et génère des chocs impulsionnels. La force exercée par le pot vibrant dépend du signal d'entrée de ce dernier qui est conditionné et amplifié par l'amplificateur **Bruël et Kjaer type 2718**.

Ce type d'excitateur a été choisi pour appliquer des forces impulsionnelles de manière automatique sur la poutre du fait du grand nombre d'essais à réaliser. Une interface LabVIEW pour l'acquisition des données permet de générer les signaux nécessaires au fonctionnement et au contrôle du pot vibrant.

La force générée par le pot vibrant est mesurée par un capteur de force Endero 2311-10 de sensibilité  $10mV/lbF$ , qui équivaut à  $2.273mV/N$ , muni d'un embout semi-sphérique en acier. La durée de l'impulsion est  $0.004s$ .

Les caractéristiques du pot vibrant sont rappelées dans le tableau 7.3. A noter que le niveau d'excitation doit être suffisant pour obtenir un rapport signal sur bruit correct.

Transducteur	Impédance ( $\Omega$ )	Puissance (VA)	Sensibilité (mV/N)	Masse (kg)	Force (N)
Pot vibrant K2004E01	3.5	15	2.27	3.1	20

TABLEAU 7.3 – Caractéristiques du pot vibrant

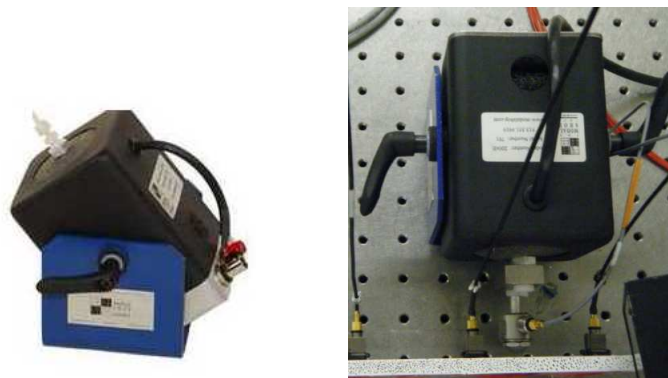
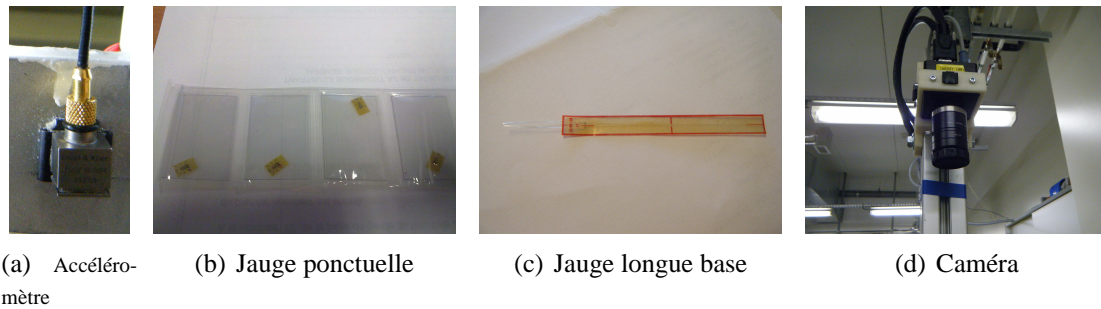


FIGURE 7.3 – Photos du pot vibrant

#### 7.1.4 Description des capteurs

Les signaux de vibration sont mesurés par onze accéléromètres B&K de type 4507, dix jauges longue base (JLB) et onze jauges ponctuelles (JP), soit 33 capteurs au total (Fig. 7.4), ainsi qu'une caméra rapide.

Les accéléromètres ont été calibrés par un étalonneur portable B&K de type 4294. L'étalonneur produit un signal sinusoïdal de fréquence  $159.2Hz$  et d'accélération  $10.02m/s^2$  et l'accéléromètre doit



**FIGURE 7.4 – Photos des capteurs de vibration**

donc mesurer cette valeur d'accélération. Les caractéristiques des différents capteurs sont reportées dans les tableaux 7.4, 7.5 et 7.6.

Sensibilité nominale ( $mV/g$ )	100.4
Domaine fréquentiel (Hz)	0.3 à 6000
Fréquence de résonance (kHz)	18
Plage de températures ( $^{\circ}C$ )	-54 à +121
Etendues de mesure ( $g_{peak}$ )	+/-71
Masse sans les fils (g)	46

**TABLEAU 7.4 – Caractéristiques de l'accéléromètre**

Longueur (cm)	6.7
Compensation thermique ( $10^{-6}/^{\circ}C$ )	10.8
Facteur de Jauge	$2.12 \pm 1\%$
Resistance ( $\Omega$ )	$119.8 \pm 0.2\%$

**TABLEAU 7.5 – Caractéristiques de la jauge longue base**

Facteur de Jauge	1.97
Résistance( $\Omega$ )	120

**TABLEAU 7.6 – Caractéristiques de la jauge ponctuelle**

La poutre a été sablée afin de permettre une meilleure adhérence des jauges. Les différentes jauges sont collées sur la face avant de la poutre tandis que les accéléromètres sont instrumentés sur des plots collés sur la face arrière. Les capteurs sont régulièrement espacés sur toute la longueur de la poutre, soit  $h = 67mm$ , le pas entre deux accéléromètres. Le positionnement des différents capteurs est répertorié dans le tableau 7.7 et illustré sur la figure (7.5). La figure 7.6 présente des photos des deux faces de la poutre sur lesquelles sont positionnés les différents capteurs.

Pour assurer la qualité de la mesure basée sur des jauges de déformation, un critère important à prendre en compte est le type de montage. Il faut en effet privilégier une technique de câblage particulière [7]. La caméra rapide de type Baumer HXC40, dont la cadence maximale à pleine échelle vaut  $337images/s$

Capteur	Accéléromètres	Jauges Ponctuelles	Jauges Longue Base	
	x(mm)	x (mm)	a (mm)	b (mm)
$n^{\circ} 1$	18	18	18	85
$n^{\circ} 2$	85	85	85	152
$n^{\circ} 3$	152	152	152	219
$n^{\circ} 4$	219	219	219	286
$n^{\circ} 5$	286	286	286	353
$n^{\circ} 6$	353	353	353	420
$n^{\circ} 7$	420	420	420	487
$n^{\circ} 8$	487	487	487	554
$n^{\circ} 9$	554	554	554	621
$n^{\circ} 10$	621	621	621	688
$n^{\circ} 11$	688	688	-	-

TABLEAU 7.7 – Placement des accéléromètres, des jauges longue base et des jauges ponctuelles sur la poutre E-E

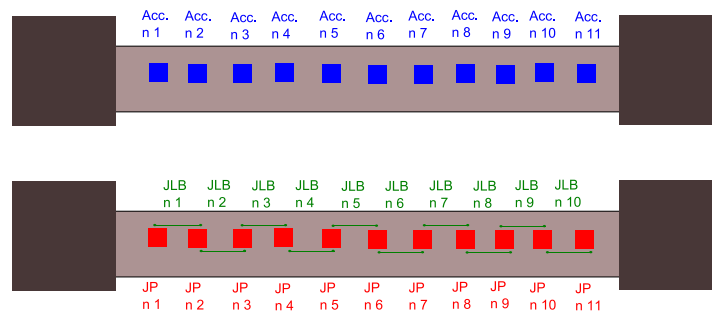


FIGURE 7.5 – Placement des capteurs sur la poutre E-E

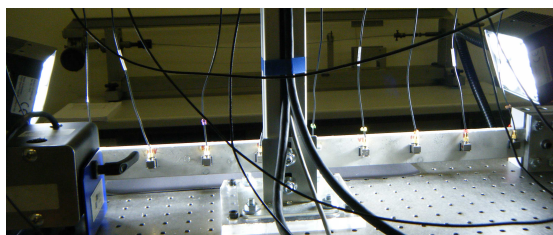
(Fig. 7.4(d)) est utilisée pour enregistrer le mouvement de la poutre. Elle possède un convertisseur analogique/numérique 8 bits. Sa capacité de stockage est limitée et dépend de la durée de l'enregistrement, de la fréquence d'acquisition et aussi de la dimension des images (en nombre de pixels). Un compromis est donc à trouver en fonction de la taille de la zone filmée et de la qualité de la résolution voulue. Cette résolution est importante dans la mesure où elle détermine en partie la qualité des résultats obtenus par la corrélation d'images.

Avec la corrélation d'images, il est possible de suivre un point particulier au cours du temps. Des techniques avancées de traitement d'images permettent de reconstruire des déformées haute résolution d'une structure. Les paramètres modaux pourront ainsi être identifiés à partir des signaux de déplacement temporels mesurés par la corrélation d'images enregistrées par la caméra. Ce point sera l'objet du Chapitre 8.

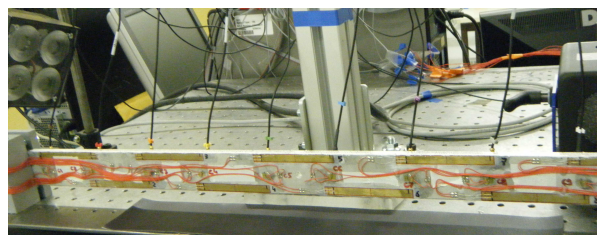
### 7.1.5 Conditions d'acquisition des signaux

L'acquisition des signaux est réalisée à l'aide d'un chassis Compact DAQ une carte National Instrument pouvant contenir jusqu'à huit modules différents. Les signaux ont été échantillonnés avec une fréquence de  $10240Hz$ . Pour les mesures, 20480 points sont pris ce qui correspond à une durée d'enregistrement  $T_{acq} = 2s$  donc le nombre de lignes sera 20480. Le pas de calcul de la FFT (Fast Fourier Transform) est alors égal à  $62.5mHz$ .





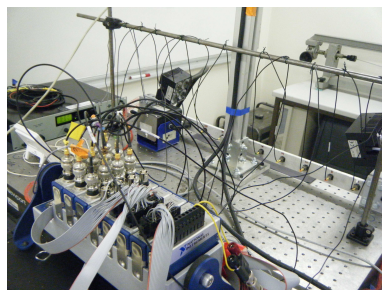
(a) Photo face 1



(b) Photo face 2

**FIGURE 7.6 – Photos de la poutre E-E instrumentée**

Les signaux des accéléromètres et le signal du capteur de force sont numérisés par des modules NI 9234 (4 voies par module) au nombre de 4. Les signaux issus des jauges, montées en quart de pont, sont numérisés par des modules NI 9235 (8 voies pour un module), au nombre de 3. Une photographie du dispositif est présentée sur la figure 7.7.



(a)

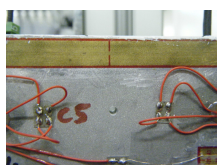


(b)

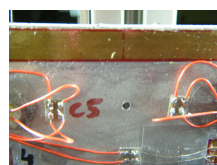
**FIGURE 7.7 – Photos du dispositif pour les essais dynamiques**

### 7.1.6 Cas d'endommagement réalisés

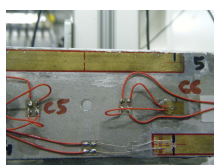
La description complète des états d'endommagement est présentée dans le tableau 7.8 et illustrée sur la figure 7.8. En dépit des simulations numériques faites dans le Chapitre 4 avec une entaille comme modèle de défaut, nous avons choisi de percer la poutre pour des questions de praticité. Le trou, dont le diamètre augmentera progressivement, est réalisé à l'aide d'une perceuse et est situé à l'abscisse  $x = 321mm$  par rapport à l'encastrement gauche.



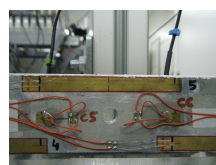
(a) Trou 2mm



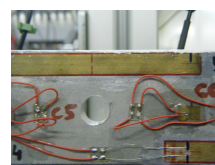
(b) Trou 4mm



(c) Trou 6mm



(d) Trou 8mm



(e) Trou 10mm

**FIGURE 7.8 – Photos de la poutre endommagée avec les différentes tailles de trous**

Afin de comparer les deux types d'endommagement, trou et entaille, et de faire la correspondance avec les études numériques du Chapitre 4, nous avons calculé les pertes de masses et de raideur dues

Etat n°0	Sain
Etat n°1	$D = 2mm$
Etat n°2	$D = 4mm$
Etat n°3	$D = 6mm$
Etat n°4	$D = 8mm$
Etat n°5	$D = 10mm$

TABLEAU 7.8 – Cas d'endommagement

Cas	Diamètre trou	Profondeur entaille	Variation de raideur locale	Variation de masse locale
	$D(mm)$	$b(mm)$	$\frac{\Delta EI(\%)}{EI}$	$\frac{\Delta \mu(\%)}{\mu}$
0	0	0	0	0
1	2	0.2	0.473	0.473
2	4	0.76	1.891	1.891
3	6	1.68	4.261	4.261
4	8	3.04	7.565	7.565
5	10	4.72	11.820	11.820

TABLEAU 7.9 – Comparaison entaille-trou

au trou et puis nous avons déterminé la profondeur d'entaille correspondante. Le tableau 7.9 reporte les profondeurs d'entailles et les diamètres de trous correspondant à des variations de masse et de raideur locales identiques.

Pour une poutre de  $40mm$  de largeur, un trou de  $4mm$  de diamètre, par exemple, provoquera une perte de masse et de rigidité équivalente à celle provenues d'une entaille de  $0.76mm$  de profondeur et de  $7.05mm$  de largeur.

## 7.2 Évaluation du niveau des bruits parasites

Les bruits parasites peuvent être une source importante d'erreur lors de la mesure de signaux électriques faibles comme ceux provenant des ponts de jauge. Ces bruits, qui peuvent être aléatoires ou périodiques, selon la nature de la source qui les cause, s'ajoutent au signal du capteur et ont pour effet de limiter la précision des mesures effectuées avec le capteur.

Pour tenter d'évaluer le niveau de bruit des signaux, nous avons enregistré des mesures sur la poutre sur une durée  $t = 90\text{ s}$  en absence d'excitation. Rappelons que la période d'échantillonnage utilisée est  $T = 97.65\text{ }\mu\text{s}$ , soit un nombre d'échantillons étudiés ici  $N_e = 900000$ . Ces mesures ont permis de collecter des informations représentatives du bruit de mesure pour les différents capteurs en calculant l'écart type de chacun des signaux.

JLB	$\sigma(\mu def)$	SNR (dB)	JP	$\sigma(\mu def)$	SNR (dB)	Accéléromètre	$\sigma(10^{-2} m.s^{-2})$	SNR (dB)
JLB. n°1	7.62	31.3858	JP. n°1	12.67	35.5123	Acc. n°1	0.59	122.6820
JLB. n°2	1.93	66.2018	JP. n°2	1.77	60.2716	Acc. n°2	0.59	135.3972
JLB. n°3	29.18	11.3792	JP. n°3	2.59	60.3596	Acc. n°3	0.62	134.3341
JLB. n°4	1.82	68.3838	JP. n°4	1.87	69.6906	Acc. n°4	0.66	133.0127
JLB. n°5	2.20	63.5815	JP. n°5	2.23	64.3332	Acc. n°5	0.69	131.9982
JLB. n°6	1.83	70.1279	JP. n°6	1.82	70.3279	Acc. n°6	0.68	132.6907
JLB. n°7	1.98	64.6399	JP. n°7	1.75	69.5630	Acc. n°7	0.61	126.2621
JLB. n°8	1.85	71.3728	JP. n°8	1.98	70.8785	Acc. n°8	0.51	137.9637
JLB. n°9	1.82	72.1130	JP. n°9	1.85	72.2213	Acc. n°9	0.46	139.9532
JLB. n°10	1.91	59.3284	JP. n°10	1.83	69.6558	Acc. n°10	0.45	140.6423
			JP. n°11	1.82	70.0350	Acc. n°11	0.46	137.4092

TABLEAU 7.10 – Ecart-type du bruit des accéléromètres et des jauges et valeur du SNR (dB)

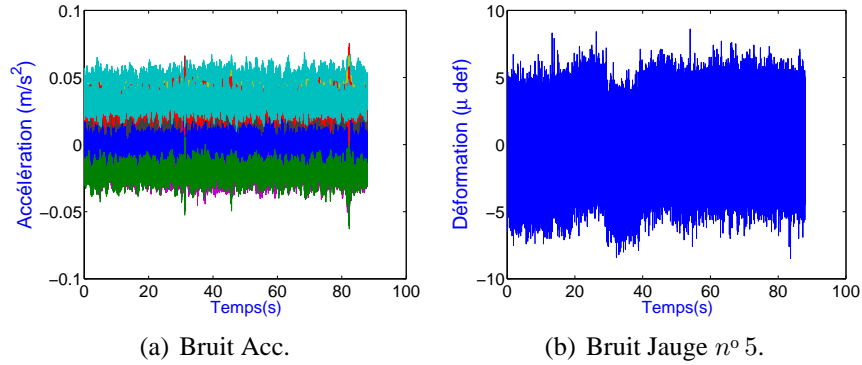


FIGURE 7.9 – Bruit de mesure des accéléromètres et de la jauge ponctuelle n° 5

Les figures 7.9(a) et 7.9(b) illustrent le spectre du bruit des signaux de mesure sur la poutre sans aucune excitation. Le tableau 7.10 reporte la valeur de l'écart-type et le rapport signal sur bruit (SNR) obtenu en (dB) pour un essai pour les différents capteurs. Le SNR est en effet calculé par l'expression (7.2)[1]. Il est clair que les accéléromètres ont un SNR assez important par rapport aux deux types de jauges, la JP n° 1 et la JLB n° 3 sont en effet très bruitées par rapport aux autres jauges.

$$SNR = 20 \log_{10} \frac{A_{max}}{A_{bruit}} \quad (7.2)$$

où  $A_{max}$  est le maximum de la valeur absolue du signal mesuré et  $A_{bruit}$  l'écart-type du bruit de mesure pour les différents capteurs.

Ceci permet de prévoir des résultats dispersés dans la suite de l'analyse.

### 7.3 Nombre optimal de capteurs selon Sazonov et al. [2]

Dans cette expérience, seulement 11 accéléromètres ont été instrumentés sur la poutre E-E puisque c'était le nombre d'accéléromètres disponible au sein du Laboratoire. Les accéléromètres sont régulièrement espacés sur la poutre comme déjà décrit. Nous voulons vérifier si ce nombre de capteurs est suffisant selon Sazonov et al. [2] afin d'étudier les 3 premiers modes.

La résolution spatiale optimale est déterminée en fonction du bruit de mesure, comme l'exprime l'équation 3.17. Le bruit  $\varepsilon$  est évalué à 0.59%.



L'intervalle de résolution spatial recommandé dans [2]  $\left[\frac{1}{h_{max}} \quad \frac{1}{h_{min}}\right]$  est exprimé dans les expressions 3.19 et 3.20.

Les résultats du calcul sont répertoriés dans le tableau 7.11

	1 mode	2 modes	3 modes
$h_{opt}$ (mm)	109	66	47
$n_{opt} = L/h_{opt}$	7	11	15
$\left[\frac{1}{h_{max}} \quad \frac{1}{h_{min}}\right]$	[2 27]	[3 44]	[4 62]

**TABEAU 7.11 – Résolution spatiale optimale : nombre de capteurs optimal correspondant et intervalle de résolution spatiale pour les trois premiers modes de la poutre**

Nous rappelons que  $h_{min}$  correspond aux erreurs provenant du bruit de mesure et  $h_{max}$  correspond aux erreurs de troncature dans le calcul de la courbure modale. Les résultats montrent que, selon le niveau de bruit de mesure existant, le nombre de capteurs disponibles (11 accéléromètres) ne permet d'évaluer que les deux premiers modes ce qui affectera énormément les résultats de localisation d'endommagement par les méthodes utilisant la courbure modale.

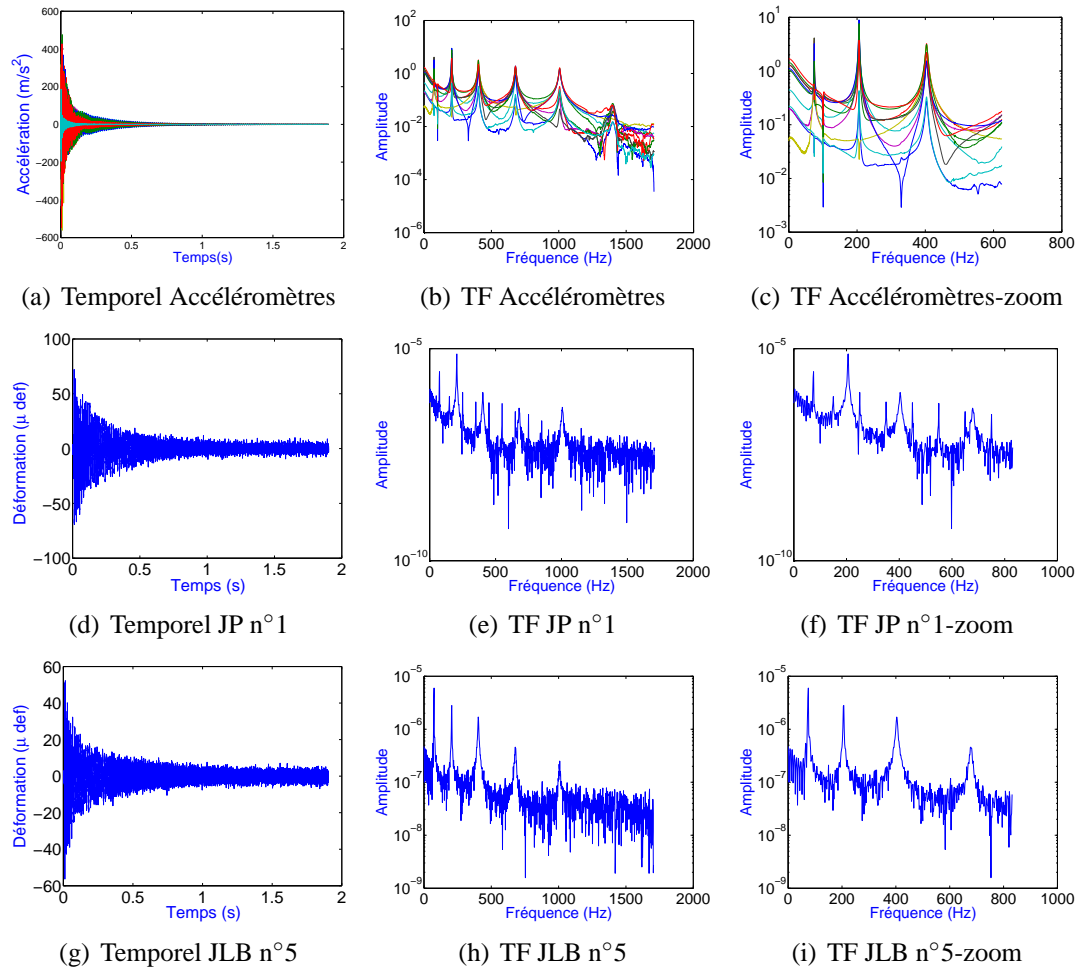
## 7.4 Analyse modale expérimentale de la poutre E-E saine

### 7.4.1 Analyse spectrale et étude de dispersion

Une campagne de deux cents essais a été réalisée sur la poutre pour tous les cas de défaut : 100 essais avec l'axe des accéléromètres normal à l'axe neutre de la poutre et 100 essais avec l'axe parallèle à l'axe neutre de la poutre. La poutre était soumise à des excitations impulsionnelles générées par le pot vibrant avec une amplitude de 5V et une durée d'impulsion de 0.004s. Chacun des chocs impulsionnels est acquis dans une fenêtre temporelle bien adaptée en utilisant un déclencheur (trigger). Le pré-trigger est ajusté sur un seuil de mesure de la force afin d'enregistrer la totalité du signal de la force, de la réponse en accélération et en déformation. Comme le bruit de mesure est important, environ  $2\mu def$  pour les jauges, le niveau d'excitation doit être suffisant pour obtenir un rapport signal sur bruit correct. Tous les essais ont été réalisés pour un niveau d'excitation d'environ 129 N.

**Note :** *Devant l'accumulation des tâches à accomplir au cours de l'expérience, notamment le post-traitement des données, les mesures réalisées par les accéléromètres instrumentés avec leur axe parallèle à l'axe neutre de la poutre n'ont pas été exploitées complètement et ne seront donc pas présentées dans ce mémoire.*

Le but de cette série de mesures sur la poutre est de déterminer la dispersion des paramètres modaux identifiés et la répétabilité des essais.



**FIGURE 7.10 – Signaux temporels et TF correspondantes obtenus pour la poutre E-E à partir des accéléromètres, de la jauge ponctuelle n°1, de la jauge longue base n°5**

Afin de limiter les erreurs liées aux conditions de mesure (position des capteurs, excitation, bruits sur la chaîne d'acquisition, faible non linéarité de la structure, etc.), les résultats qui ont été analysés ultérieurement sont ceux obtenus par un moyennage des essais sensiblement identiques. Pour tous les cas analysés, les trois premiers modes propres ont été obtenus.

La figure 7.10 présente les signaux temporels et les TF obtenus avec les accéléromètres, les jauges longue base et les jauges ponctuelles pour la poutre E-E.

Pour s'en affranchir, des fluctuations souvent observées au niveau de la mesure les signaux bruts sont filtrés numériquement par un filtre passe-haut avec une fréquence de coupure très faible (0.5 Hz) (fonction `filt` de Matlab). Les fréquences additionnelles proportionnelles à 50 Hz, présentes au niveau de la TF de la mesure des jauges ponctuelles et des jauges longue base, s'expliquent par le type de câblage. En effet, comme déjà mentionné précédemment, l'influence des longueurs de câbles utilisées détermine la qualité du signal.

Sur la figure 7.10, les signaux temporels permettent de montrer que le niveau de bruit est beaucoup plus important au niveau des jauges et les TF montrent la répartition spectrale des mesures. En général, les accéléromètres vont privilégier les moyennes et hautes fréquences alors que les jauges les basses fréquences. En d'autres termes, la mesure de l'accélération (directement proportionnelle aux forces

dynamiques induisant le mouvement) permettra de mettre en évidence des phénomènes de fréquences élevées.

## 7.4.2 Identification modale par la TO, COSMAD et la SOD

La FFT (Fast Fourier Transform) est la méthode classique utilisée dans l'identification des paramètres modaux qui est la plus rapide mais la moins précise. Elle consiste à extraire les fréquences propres par un simple "peak-picking" du spectre de TF. Les valeurs ont été obtenues mais ne seront pas présentées afin d'alléger le manuscrit et puisqu'elles n'ont pas été utilisées dans l'application des différentes méthodes.

Ainsi, trois méthodes d'identification modale ; la TO, la SOD et COSMAD, ont été utilisées et présentées ici afin de comparer les résultats obtenus pour les paramètres modaux et conclure sur la performance de chacune. Puis nous avons choisi la méthode adoptée pour la suite du manuscrit.

### 7.4.2.1 Identification modale par la TO

Cette méthode d'analyse modale est une méthode dite en output-only, c'est-à-dire que le signal de mesure de l'excitation n'est pas utilisé lors du traitement des données. La Transformée en Ondelettes (TO) [3, 4, 5, 6] permet donc l'estimation des paramètres modaux (modes, pulsations propres et facteurs d'amortissement) à partir de la seule connaissance des réponses.

Les ondelettes mères utilisées pour le traitement des signaux par la TO sont celles de Cauchy. Les éléments essentiels de la méthode de la TO, notamment pour le traitement des réponses transitoires, sont rappelées en annexe C. Les paramètres sont le temps d'arrêt  $t_f$  des signaux traités, un facteur de qualité  $Q$ , la plage de fréquence à étudier et  $N_{TO}$  le nombre de points discrétisant cet intervalle fréquentiel. Pour plus de détails sur les paramètres de cette méthode, on se référera à [5] et [6]. Le tableau 7.12 reporte les paramètres utilisés.

Mode	$N_{TO}$	Q			$t_f$ (s)		
		Acc.	JP.	JLB	Acc.	JP.	JLB
$n^{\circ} 1$	1000	20	18	18	0.84	0.45	0.45
$n^{\circ} 2$	1000	40	35	35	0.64	0.38	0.38
$n^{\circ} 3$	1000	55	50	50	0.35	0.146	0.146

TABLEAU 7.12 – Paramètres de la TO pour le traitement des signaux temporels des différents types de capteurs.

Dans l'analyse fréquentielle, le filtre (ou la fenêtre) est caractérisé par un facteur de qualité qui est défini comme le rapport entre le centre de fréquence et la bande de fréquence. Ce facteur de qualité dépend uniquement de l'ondelette mère. Le coefficient  $Q$  varie d'un mode à l'autre, plus le mode est élevé plus  $Q$  sera élevé. Les tableaux 7.13 et 7.14 présentent respectivement les fréquences propres et les modes propres avec les dispersions correspondantes de la poutre E-E saine.

Mode	Fréquence propre (Hz)	$\frac{\Delta\sigma}{\sigma}$ (%)
$n^{\circ} 1$	74.56	0.49
$n^{\circ} 2$	205.91	0.29
$n^{\circ} 3$	403.64	0.20

**TABEAU 7.13 – Trois premières fréquences propres identifiées par la TO pour la poutre E-E saine, à partir des accéléromètres pour les 100 essais.**

Capteur	Mode n° 1		Mode n° 2		Mode n° 3	
	Moyenne	$\Delta\sigma/\sigma$ (%)	Moyenne	$\Delta\sigma/\sigma$ (%)	Moyenne	$\Delta\sigma/\sigma$ (%)
Acc.n° 1	0.01	2.56	0.04	0.22	0.08	1.19
Acc.n° 2	0.16	0.14	0.42	0.15	0.68	0.16
Acc.n° 3	0.43	0.18	0.87	0.04	1.00	0.00
Acc.n° 4	0.72	0.10	1.00	0.00	0.47	0.12
Acc.n° 5	0.92	0.06	0.67	0.14	-0.46	0.37
Acc.n° 6	1.00	0.00	0.01	22.09	-0.94	0.04
Acc.n° 7	0.920	0.18	-0.65	-0.48	-0.48	0.12
Acc.n° 8	0.71	0.08	-0.99	0.04	0.46	0.09
Acc.n° 9	0.44	0.08	-0.88	0.07	0.98	0.07
Acc.n° 10	0.17	0.33	-0.44	0.07	0.70	0.26
Acc.n° 11	0.01	1.48	-0.05	0.31	0.10	1.06

**TABEAU 7.14 – Vecteurs propres obtenus par la TO pour les trois premiers modes de la poutre E-E saine à partir des accéléromètres.**

#### 7.4.2.2 SOD (Smooth Orthogonal Decomposition)

Dans cette partie, nous présentons l'utilisation de la SOD (smooth orthogonal decomposition) sur les réponses libres de la poutre pour l'identification des paramètres modaux. L'idée de cette méthode est l'utilisation de l'auto-corrélation de la réponse libre.

La méthode d'identification SOD a été proposée par Chelidze et Zhou [10]. Il s'agit d'utiliser la relation entre l'auto-corrélation du déplacement et l'auto-corrélation de la vitesse d'une réponse libre afin de déterminer les fréquences propres et les modes propres associés. Une autre application de la SOD pour identifier des paramètres modaux sur la réponse vibratoire sous excitation aléatoire a été proposée par Farooq et Feeny [11]. La technique SOD ne nécessite pas la connaissance de la matrice de masse pour identifier les modes propres et permet d'obtenir également les fréquences propres.

T.T.H. Le dans sa thèse [13] a appliqué cette technique en étudiant sa sensibilité par rapport au nombre de points de mesure et aux positions des points de mesure. Elle a trouvé que les résultats sont assez satisfaisants avec un nombre de points de mesure  $> 9$  et lorsque ces points sont répartis sur toute la structure (poutre, câble ...).

Le tableau 7.15 présente les valeurs moyennes et les dispersions des trois premières déformées modales obtenues avec les accéléromètres pour la poutre saine à l'aide de la SOD, pour tous les essais de la poutre saine. Le tableau 7.16 présente les valeurs moyennes et les dispersions des fréquences propres des trois premiers modes obtenus avec les accéléromètres.

Capteur	Mode n° 1		Mode n° 2		Mode n° 3	
	$\phi_1$		$\phi_2$		$\phi_3$	
	Moyenne	$\Delta\sigma/\sigma(\%)$	Moyenne	$\Delta\sigma/\sigma(\%)$	Moyenne	$\Delta\sigma/\sigma(\%)$
Acc.n° 1	0.01	6.53	0.04	0.29	0.08	1.25
Acc.n° 2	0.15	2.81	0.43	0.24	0.67	0.44
Acc.n° 3	0.41	2.22	0.87	0.11	1.00	0.00
Acc.n° 4	0.69	1.47	1.00	0.00	0.48	1.49
Acc.n° 5	0.91	0.71	0.67	0.29	-0.44	3.21
Acc.n° 6	1.00	0.00	0.01	19.38	-0.92	1.13
Acc.n° 7	0.93	0.60	-0.65	0.16	-0.48	0.68
Acc.n° 8	0.73	1.18	-0.99	0.08	0.43	3.69
Acc.n° 9	0.45	1.87	-0.87	0.21	0.94	2.07
Acc.n° 10	0.18	2.84	-0.44	0.45	0.68	1.52
Acc.n° 11	0.01	4.81	-0.05	0.73	0.10	0.54

**TABEAU 7.15 – Déformées modales des trois premiers modes propres déterminés avec la SOD à partir des signaux des accéléromètres pour la poutre E-E saine (100 essais).**

Mode	Fréquence propre	
	Moyenne (Hz)	$\Delta\sigma/\sigma\%$
$n^\circ 1$	74.94	0.53
$n^\circ 2$	205.56	0.35
$n^\circ 3$	404.74	0.16

**TABEAU 7.16 – Fréquences propres obtenues par la SOD pour les trois premiers modes de la poutre E-E saine à partir des accéléromètres.**

#### 7.4.2.3 Identification modale par COSMAD

Dans le but de comparer les caractéristiques modales, on a également utilisé une toolbox sous SCI-LAB, nommée COSMAD, développée par l'INRIA et l'IRISA, qui permet d'obtenir les fréquences propres, les amortissements modaux et les déformées modales. Dans la comparaison nous avons utilisé les fréquences seulement. Ce logiciel s'appuie sur la méthode des sous-espaces [1, 2, 3, 17] (voir annexe D)

L'algorithme d'identification permet d'obtenir une estimation des paramètres modaux pour un ordre de modèle (ou nombre de pôles) donné, ce paramètre qui étant aisément modifiable. Déterminer quel ordre de modèle utiliser est l'une des premières difficultés rencontrées. Pour chaque ordre, on cherche les pôles de l'ordre précédent voisins en fréquence, amortissement, ou résidu associé. Le tracé de ce type de recherche par ordre croissant en faisant ressortir de manière itérative les propriétés se stabilisant est appelé diagramme de stabilisation.

Seuls 10 essais ont été traités avec COSMAD de la poutre saine car la technique est coûteuse en temps de calcul. La figure 7.11 montre un exemple de diagramme de stabilisation obtenu pour l'essai  $n^\circ 1$  sur la poutre E-E saine, et ceci avec les mesures d'accélération sur une bande de fréquence de 0 à 1600 Hz. On visualise alors les six premières fréquences identifiées par cet algorithme.

En pratique les modes stables (en fréquence/amortissement/résidu) correspondent à des modes physiques et sont représentés par des droites sur le diagramme. La figure 7.12 illustre les diagrammes de stabilisation pour chacune des fréquences propres. L'ordre est en abscisse sur les graphes.

Par exemple, le premier mode est à 74.53 Hz. On remarque que la fréquence est identifiée à partir d'un ordre très faible et que sa valeur demeure stable lorsque l'ordre augmente.

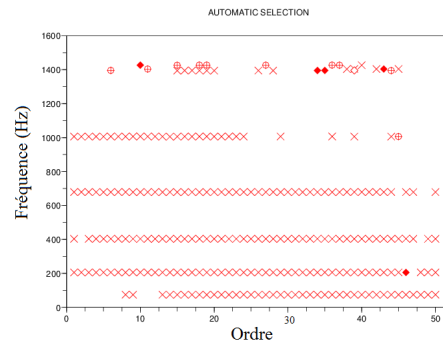


FIGURE 7.11 – Diagramme de stabilisation pour la poutre E-E pour un essai

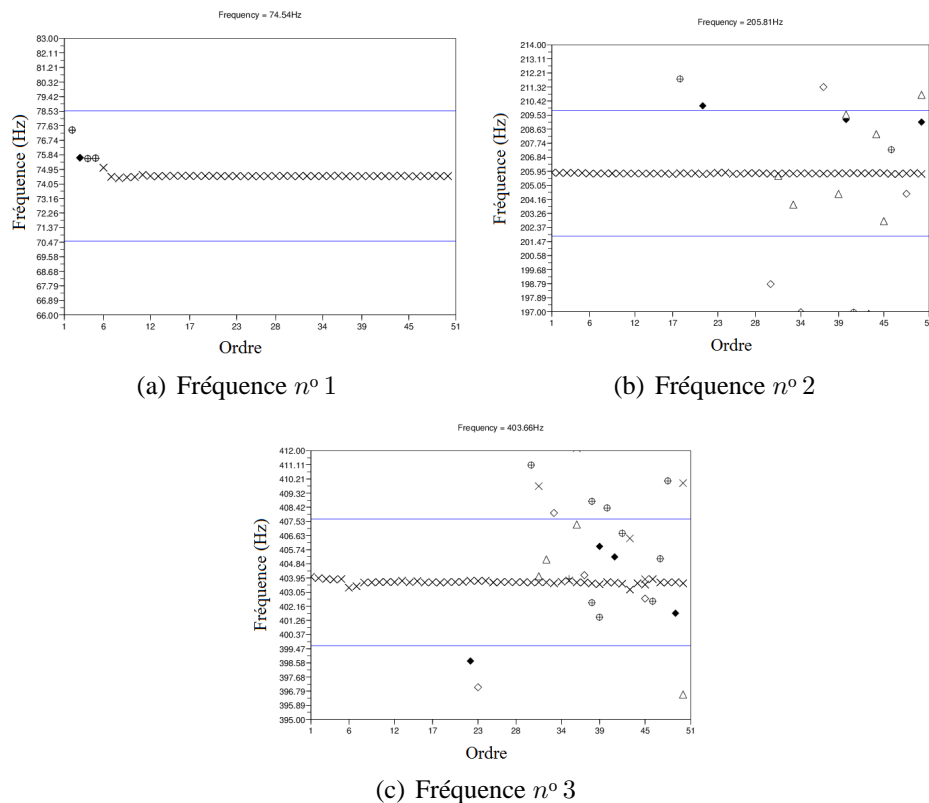


FIGURE 7.12 – Trois premières fréquences propres obtenues par COSMAD pour un essai de la poutre E-E saine

Le tableau 7.17 rapporte les valeurs moyennes déterminés à partir du diagramme de stabilisation et les dispersions sur les 10 essais choisis.

Mode	Fréquence propre	
	Moyenne (Hz)	$\delta\sigma/\sigma$ (%)
n°1	74.53	0.01
n°2	205.79	0.006
n°3	403.67	0.004

TABLEAU 7.17 – Trois premières fréquences propres identifiées par COSMAD pour la poutre E-E saine, à partir des accéléromètres.

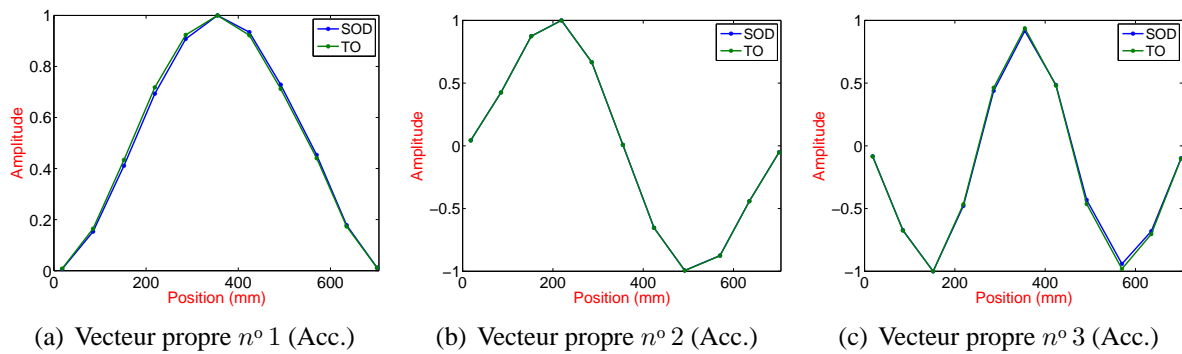
#### 7.4.2.4 Choix de la méthode d'identification

Afin de choisir la méthode d'identification convenable à utiliser dans les prochaines analyses, le tableau 7.18 reporte les fréquences propres obtenues à partir des trois méthodes : la TO, la SOD et COSMAD.

Les résultats montrent que la méthode utilisant la TO est beaucoup plus adaptée et fiable pour l'identification modale, la dispersion sur les fréquences étant plus faible. Au niveau des modes propres, la dispersion est beaucoup plus élevée pour la SOD que pour la TO. La figure 7.13 illustre les déformées modales obtenues par la SOD et la TO.

Mode	Fréquence propre				
	Moyenne (Hz)			$\delta f(\%)_{(to-cosmad)}$	$\delta f(\%)_{(to-sod)}$
	<i>cosmad</i>	<i>TO</i>	<i>sod</i>		
<b>n°1</b>	74.53	74.56	74.94	0.04	0.33
<b>n°2</b>	205.79	205.91	205.56	0.05	0.32
<b>n°3</b>	403.67	403.64	404.74	0.007	0.18

**TABEAU 7.18 – Trois premières fréquences propres identifiées par COSMAD, la TO et la SOD pour la poutre E-E saine à partir des accéléromètres.**



**FIGURE 7.13 – Trois premières déformées modales obtenues par la SOD et la TO**

A partir des résultats fournis par les différentes techniques d'identification modale, nous avons conclu que la méthode fondée sur la SOD est rapide mais non précise contrairement à la TO et COSMAD. La performance de la méthode fondée sur la SOD dépend d'abord du nombre de points de mesure et aussi de la distribution des points de mesure sur la structure. Le traitement des données avec COSMAD est long en temps d'analyse surtout le choix de l'ordre du mode et la présence de modes erronés stables qui doivent être rigoureusement étudiés. Cependant dans la suite du manuscrit nous avons utilisé la TO pour extraire les paramètres modaux. Tous les essais réalisés sur la poutre saine et endommagée sont donc traités par la TO. Dans le paragraphe suivant, nous allons présenter l'étude des dispersions obtenues pour les paramètres modaux.

## 7.5 Interprétation des résultats obtenus par la TO

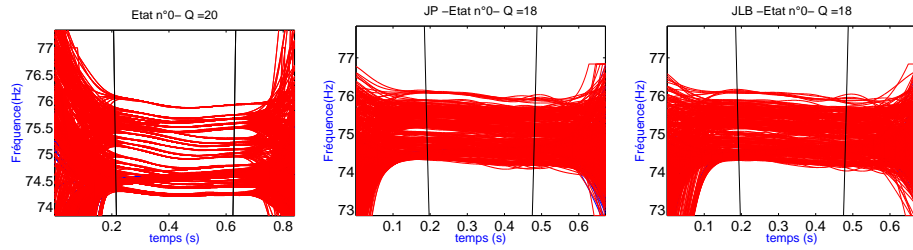
L'analyse modale expérimentale de la poutre saine a également pour but de détecter d'éventuelles non-linéarités géométriques affectant le comportement dynamique de la poutre. Les non-linéarités géométriques apparaissent lorsque les rotations de la poutre sont importantes, c'est-à-dire lorsque le déplacement transverse est important. Pour un choc de forte amplitude, les rotations de la poutre vont être importantes au début du signal de réponse puis, lorsque le signal s'amortit suffisamment, les rotations redeviennent petites. L'allure de la fréquence instantanée (ou arête) déterminée par la TO pour le déplacement transverse  $\nu(x, t)$  devrait en conséquence être une courbe non-linéaire au début du signal qui revient vers la valeur de la fréquence linéaire de la poutre E-E.

Les graphes de la figure 7.14 présentent les fréquences instantanées (ou arêtes) obtenues pour les trois premiers modes à l'aide de la TO pour la poutre saine. Les lignes verticales délimitent la zone de validité de la TO, les extrémités étant sujettes aux effets de bord. Sur les figures se trouvent également les amortissements temporels. Tous les essais ont été traités avec la TO. La fréquence propre choisie sera la moyenne des fréquences instantanées se trouvant entre les bords délimitant la plage fréquentielle. La figure 7.15 donne un aperçu des valeurs de la première fréquence propre obtenues par la TO à partir des différents capteurs, pour la série d'essais réalisés sur l'état sain. Ces essais pour cet état sont réalisés sur deux journées. La durée d'un essai est de 30s. Les incertitudes permettront de juger la validité de la méthode d'identification modale fondée sur la TO. La figure 7.17 montre les variations des fréquences aux instants délimitant les bords. Un faible écart est observé, ce qui caractérise une linéarité de la poutre E-E. Par ailleurs nous remarquons que la non répétabilité provient juste d'une vingtaine d'essais, alors que la majorité se trouvent autour de la même fréquence. Deux hypothèses se posent : soit un changement dans les conditions d'encastrement, soit une variation de température.

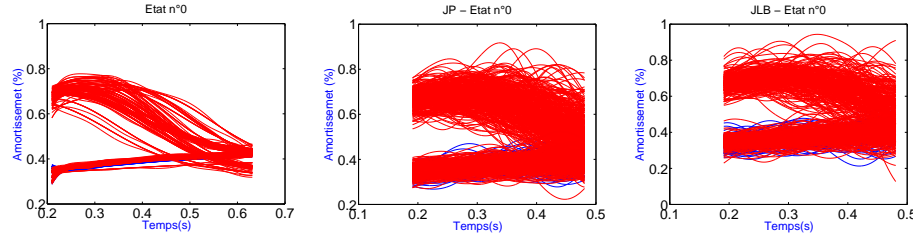
La figure 7.16 montre la variation de la première fréquence propre en fonction du temps. On voit qu'il y a des variations qui apparaissent sur un intervalle de quelques minutes et ceci après plusieurs chocs exercés sur la poutre durant la même journée. En effet, la température n'a pas été enregistrée pendant les essais. Mais comme la variation de fréquence observée se trouve sur un laps de temps réduit, nous pouvons supposer que cette variation provient d'un changement dans les encastrements à cause des chocs répétitifs sur la poutre.

Nous avons ainsi choisi les essais répétables dans les études ultérieures.

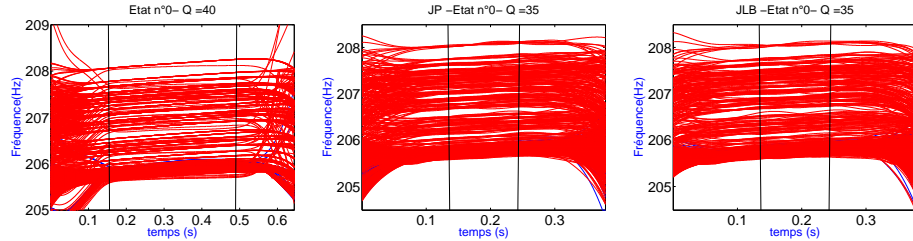




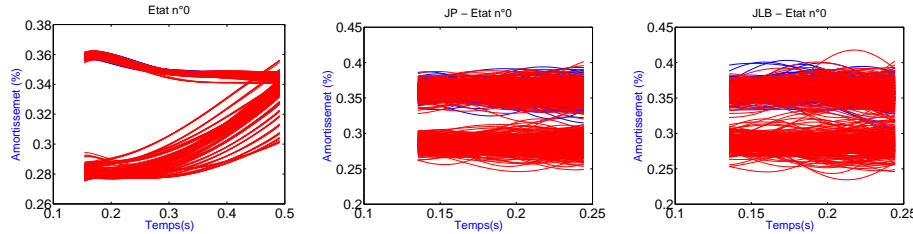
(a) Accéléromètres (b) Jauges ponctuelles (c) Jauges longue base

 Arêtes du 1<sup>er</sup> mode des signaux temporels obtenues à partir des accéléromètres, des JP et des JLB


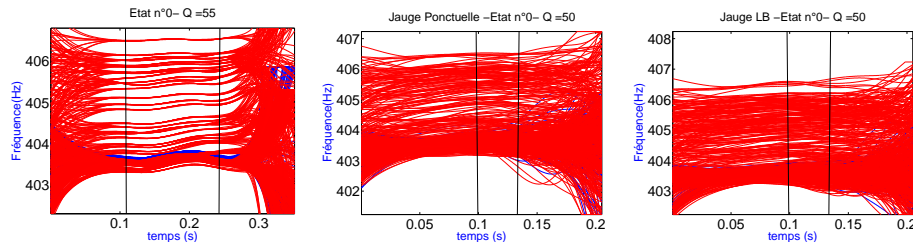
(d) Accéléromètres (e) Jauges ponctuelles (f) Jauges longue base

 Amortissement du 1<sup>er</sup> mode des signaux temporels obtenues à partir des accéléromètres, des JP et des JLB


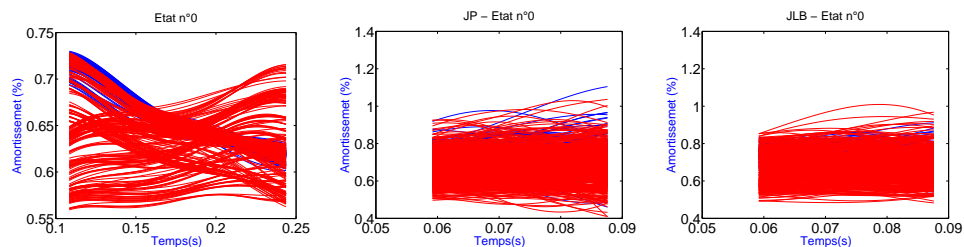
(g) Accéléromètres (h) Jauges ponctuelles (i) Jauges longue base

 Arêtes du 2<sup>ème</sup> mode des signaux temporels obtenues à partir des accéléromètres, des JP et des JLB


(j) Accéléromètres (k) Jauges ponctuelles (l) Jauges longue base

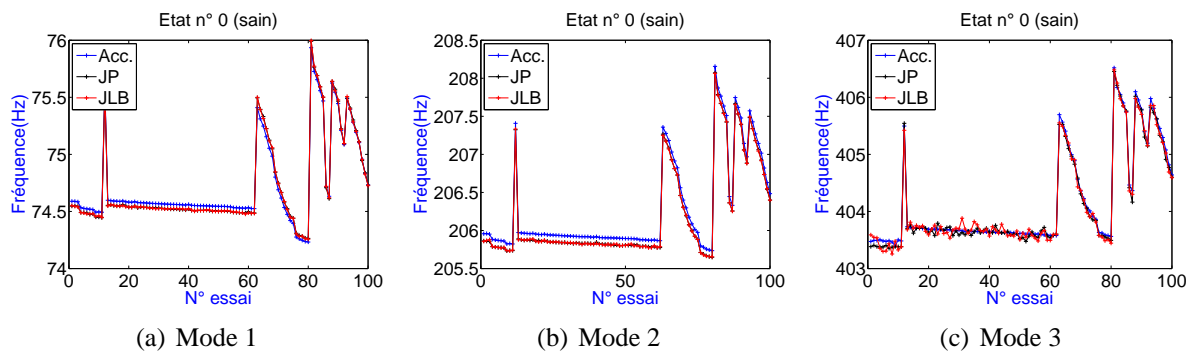
 Amortissement du 2<sup>ème</sup> mode des signaux temporels obtenues à partir des accéléromètres, des JP et des JLB


(m) Accéléromètres (n) Jauges ponctuelles (o) Jauges longue base

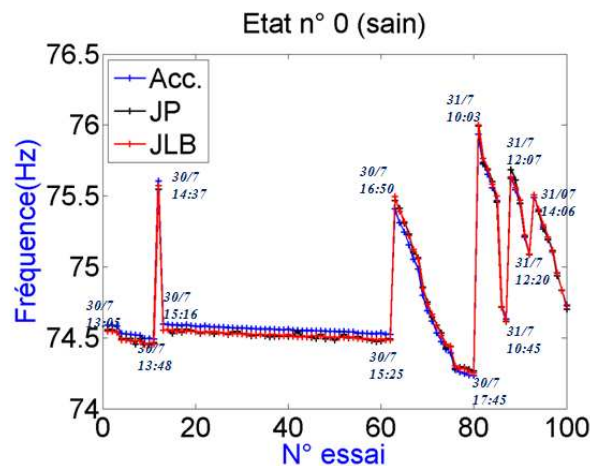
 Arêtes du 3<sup>ème</sup> mode des signaux temporels obtenues à partir des accéléromètres, des JP et des JLB


(p) Accéléromètres (q) Jauges ponctuelles (r) Jauges longue base

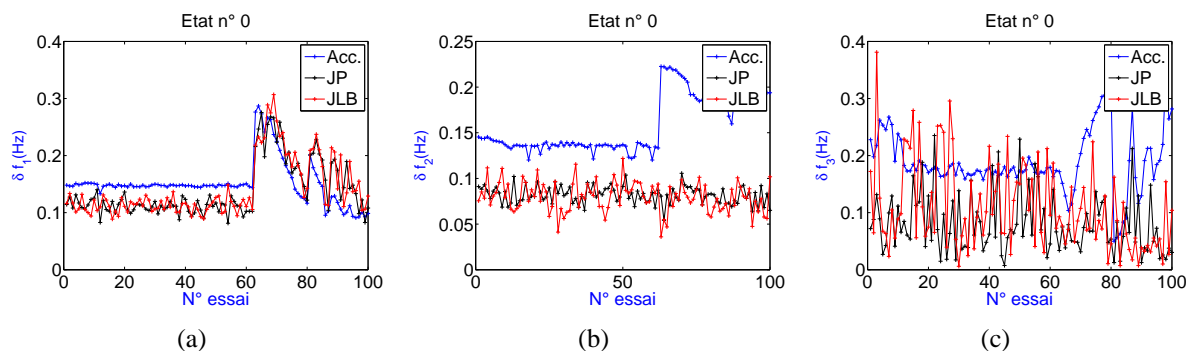
 Amortissement du 3<sup>ème</sup> mode des signaux temporels obtenues à partir des accéléromètres, des JP et des JLB



**FIGURE 7.15 – Trois premières fréquences propres obtenues avec les différents types de capteurs pour les 100 essais par ordre chronologique de leur réalisation - Etat sain**



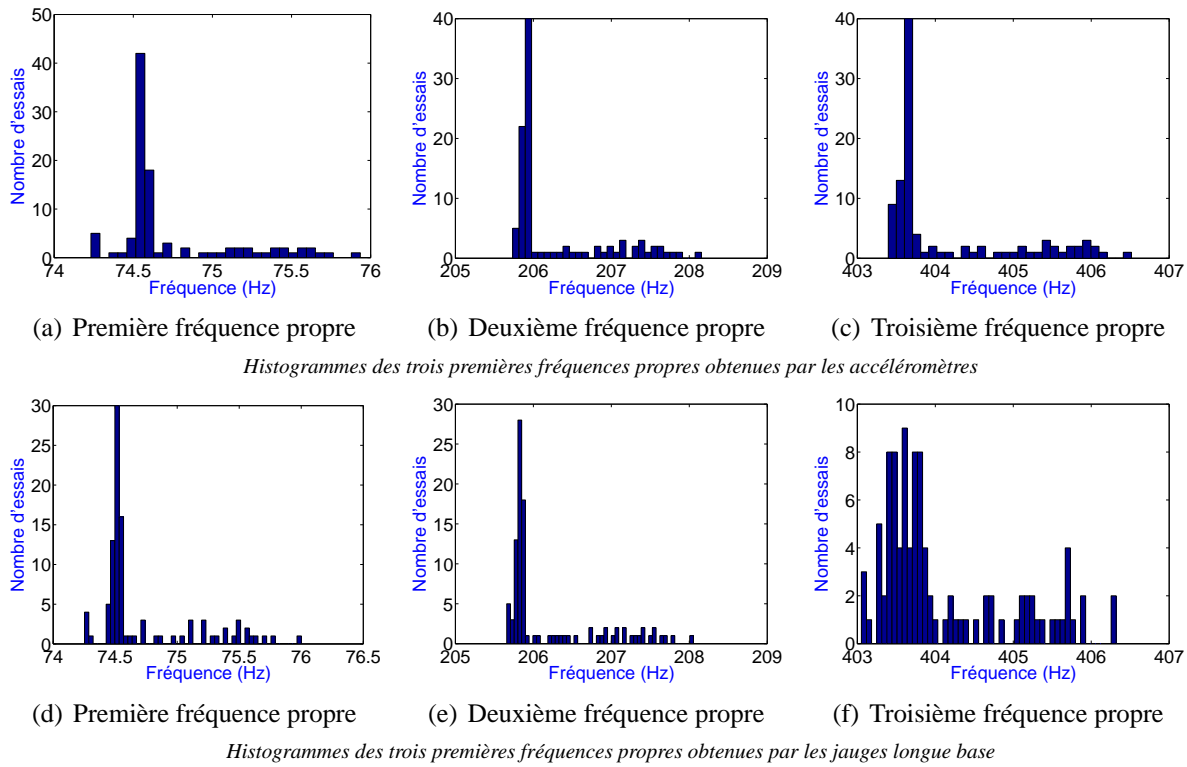
**FIGURE 7.16 – Première fréquence propre avec les accéléromètres pour les 100 essais par ordre chronologique de leur réalisation avec indication de la date de chaque essai - Etat sain**



**FIGURE 7.17 – Variation de la fréquence instantanée avec les différents types de capteurs pour les 100 essais par ordre chronologique de leur réalisation - Etat sain**

Les histogrammes des trois premières fréquences de la poutre saine construits pour les 100 mesures réalisées sont illustrés sur la figure 7.18.

Les tableaux 7.19, 7.20 et 7.21 présentent les valeurs moyennes et les dispersions des fréquences propres, coefficients d'amortissements modaux et déformées modales des trois premiers modes identifiés avec les accéléromètres, les JLB et les JP pour la poutre saine. Cette analyse est menée afin



**FIGURE 7.18 – Histogrammes des trois premières fréquences propres obtenues par les accéléromètres et les JLB**

d'observer la dispersion des paramètres modaux sur une suite d'essais considérés sous des conditions de manipulation strictement identiques. Au vu des valeurs d'amortissement modal des trois modes, il apparaît que la répétabilité est moins bonne pour les deux types de jauges que pour les accéléromètres, les valeurs de dispersion étant plus importantes, en particulier pour le troisième mode (78.48% en moyenne pour les jauges contre 3.71% pour les accéléromètres). Ceci vient du fait que le rapport signal sur bruit est moins bon pour les jauges (11.3 dB pour la JLB n° 3, 35.51 pour les JP n° 1, alors que 140 dB pour l'accéléromètre n° 10).

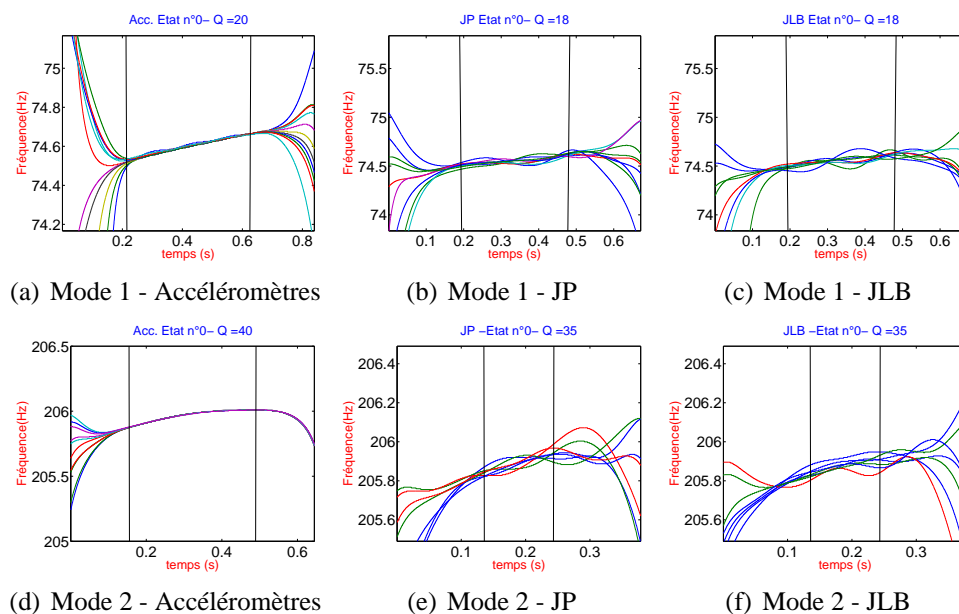
La figure 7.18 montre également que la dispersion au niveau des JP et JLB est plus élevée que pour les accéléromètres. L'ajout de masse a sans doute plus d'influence sur la courbure  $\phi''(x)$  que sur la déformée modale du fait de la double dérivation spatiale  $\phi(x)$ . D'autre part, pour le premier mode, les accéléromètres donnent des valeurs de dispersion plus élevées (0.49%) pour le premier mode que pour le deuxième et troisième mode (0.3% et 0.2% respectivement).

La dispersion de la fréquence du premier mode obtenu à partir des JP n° 2 et n° 9 est plus élevée car les jauges sont situées au nœud du mode, tout comme l'accéléromètre n° 6 pour le deuxième mode. Par conséquent, l'information provenant de ces capteurs peut affecter les résultats. Pour cela, le capteur placé au nœud d'un mode a été éliminé dans la suite car il ne permet pas d'identifier celui-ci, il n'y aura pas assez d'énergie à cet endroit.

Pour mieux visualiser les arêtes obtenues pour un seul essai (état sain-essai n° 1) sont présentées sur la figure 7.19. Les arêtes sont quasi-constantes dans le temps pour le premier mode (variations de 0.14 Hz), ce qui caractérise un comportement linéaire de la poutre.

Capteur	Mode n° 1					
	$f_1 (Hz)$		$\varepsilon_1 (\%)$		$\Phi_1$	
	Moyenne	$\Delta\sigma/\sigma\%$	Moyenne	$\Delta\sigma/\sigma\%$	Moyenne	$\Delta\sigma/\sigma\%$
Acc.n° 1	74.69	0.49	0.45	19.74	0.01	2.56
Acc.n° 2	74.69	0.49	0.45	19.75	0.16	0.14
Acc.n° 3	74.69	0.49	0.45	19.74	0.43	0.18
Acc.n° 4	74.69	0.49	0.45	19.62	0.72	0.10
Acc.n° 5	74.69	0.49	0.45	19.60	0.92	0.06
Acc.n° 6	74.69	0.49	0.45	19.54	1.00	0.00
Acc.n° 7	74.69	0.49	0.45	19.35	0.92	0.18
Acc.n° 8	74.69	0.49	0.45	19.46	0.71	0.08
Acc.n° 9	74.69	0.49	0.45	19.39	0.44	0.08
Acc.n° 10	74.69	0.49	0.44	20.15	0.17	0.33
Acc.n° 11	74.69	0.49	0.45	19.85	0.01	1.48
<b>Moy. Acc</b>	<b>74.69</b>	<b>0.49</b>	<b>0.45</b>	<b>19.65</b>		
JP. n° 1	74.72	0.52	0.46	28.71	1.00	0.00
JP. n° 2	74.72	0.52	0.46	28.47	0.52	0.91
JP. n° 3	74.72	0.53	0.43	41.23	0.05	9.63
JP. n° 4	74.72	0.52	0.46	29.52	-0.37	1.46
JP. n° 5	74.72	0.52	0.46	28.87	-0.66	0.80
JP. n° 6	74.72	0.52	0.46	28.98	-0.74	0.79
JP. n° 7	74.72	0.52	0.46	27.99	-0.60	1.03
JP. n° 8	74.72	0.52	0.46	28.52	-0.38	1.79
JP. n° 9	74.72	0.54	0.44	53.75	0.04	11.32
JP. n° 10	74.72	0.52	0.46	29.23	0.52	0.95
JP. n° 11	74.71	0.52	0.46	28.36	0.94	0.75
<b>Moy. JP</b>	<b>74.67</b>	<b>0.52</b>	<b>0.46</b>	<b>32.15</b>		
JLB. n° 1	74.72	0.52	0.46	28.75	0.99	0.79
JLB. n° 2	74.72	0.52	0.46	29.06	0.37	1.86
JLB. n° 3	74.71	0.52	0.45	29.47	-0.21	3.09
JLB. n° 4	74.71	0.52	0.46	29.49	-0.64	1.38
JLB. n° 5	74.71	0.52	0.46	28.99	-0.89	0.94
JLB. n° 6	74.72	0.52	0.46	28.97	-0.89	1.07
JLB. n° 7	74.72	0.52	0.46	28.69	-0.65	1.20
JLB. n° 8	74.71	0.52	0.47	30.47	-0.21	2.86
JLB. n° 9	74.72	0.52	0.46	30.09	0.36	1.55
JLB. n° 10	74.71	0.52	0.46	28.92	1.00	0.18
<b>Moy. JLB</b>	<b>74.67</b>	<b>0.52</b>	<b>0.46</b>	<b>29.29</b>		

**TABEAU 7.19 – Fréquences propres et amortissements modaux et déformées modales du 1<sup>er</sup> mode propre déterminés avec la TO à partir des signaux des accéléromètres, des jauges ponctuelles et des jauges longue base pour la poutre E-E saine.**

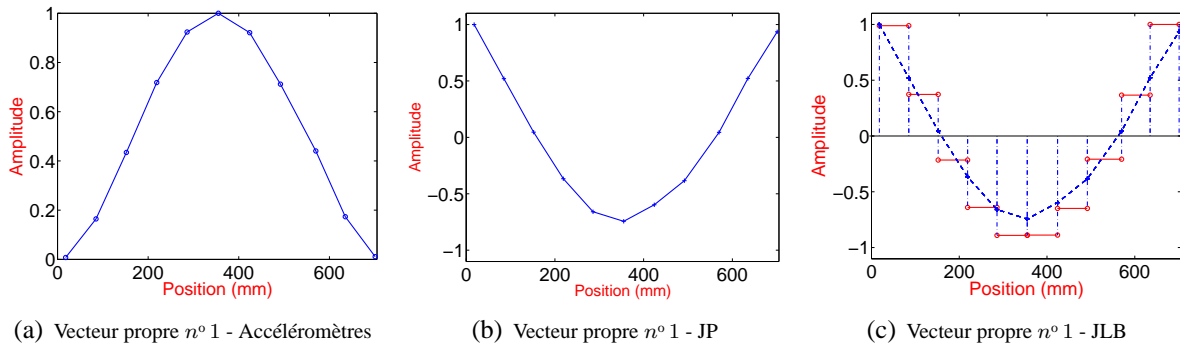


**FIGURE 7.19 – Arêtes des deux premiers modes propres obtenues à partir des accéléromètres, des JP et des JLB pour l'essai n° 1 de l'état sain**

Capteur	Mode n° 2					
	$f_2 (Hz)$		$\varepsilon_2 (\%)$		$\Phi_2$	
	Moyenne	$\Delta\sigma/\sigma\%$	Moyenne	$\Delta\sigma/\sigma\%$	Moyenne	$\Delta\sigma/\sigma\%$
Acc. n° 1	206.19	0.29	0.33	7.49	0.04	0.21
Acc. n° 2	206.19	0.29	0.33	7.51	0.42	0.14
Acc. n° 3	206.19	0.29	0.33	7.50	0.87	0.04
Acc. n° 4	206.19	0.29	0.33	7.50	1.00	0.00
Acc. n° 5	206.19	0.29	0.33	7.52	0.67	0.14
Acc. n° 6	206.21	0.27	0.38	12.24	0.01	18.85
Acc. n° 7	206.19	0.29	0.33	7.44	-0.65	0.05
Acc. n° 8	206.19	0.29	0.33	7.47	-0.99	0.06
Acc. n° 9	206.19	0.29	0.33	7.48	-0.88	0.09
Acc. n° 10	206.19	0.29	0.33	7.49	-0.44	0.06
Acc. n° 11	206.19	0.29	0.33	7.44	-0.05	0.28
<b>Moy. Acc</b>	<b>206.19</b>	<b>0.29</b>	<b>0.34</b>	<b>7.92</b>		
JP. n° 1	206.10	0.29	0.34	10.75	-1.00	0.00
JP. n° 2	206.09	0.30	0.33	20.15	-0.09	4.54
JP. n° 3	206.10	0.29	0.34	10.63	0.57	0.95
JP. n° 4	206.10	0.29	0.34	10.73	0.91	0.65
JP. n° 5	206.10	0.29	0.34	10.86	0.65	0.88
JP. n° 6	206.28	0.46	0.31	127.25	0.01	31.37
JP. n° 7	206.10	0.29	0.34	10.55	-0.58	0.86
JP. n° 8	206.10	0.29	0.33	10.76	-0.93	0.54
JP. n° 9	206.10	0.29	0.34	11.17	-0.61	0.80
JP. n° 10	206.11	0.30	0.33	21.29	0.08	5.25
JP. n° 11	206.10	0.29	0.34	10.95	0.93	0.61
<b>Moy. JP</b>	<b>206.12</b>	<b>0.31</b>	<b>0.33</b>	<b>23.19</b>		
JLB. n° 1	206.10	0.29	0.34	10.95	-0.67	0.97
JLB. n° 2	206.10	0.29	0.34	12.02	0.37	1.37
JLB. n° 3	206.10	0.29	0.34	10.63	1.00	0.11
JLB. n° 4	206.10	0.29	0.34	10.57	0.99	0.68
JLB. n° 5	206.10	0.29	0.34	10.91	0.42	1.19
JLB. n° 6	206.11	0.29	0.33	10.73	-0.38	1.30
JLB. n° 7	206.10	0.29	0.34	10.81	-0.97	0.65
JLB. n° 8	206.10	0.29	0.34	10.72	-0.99	0.71
JLB. n° 9	206.10	0.29	0.34	11.03	-0.40	1.24
JLB. n° 10	206.10	0.29	0.34	11.59	0.69	0.92
<b>Moy. JLB</b>	<b>206.10</b>	<b>0.29</b>	<b>0.34</b>	<b>11.00</b>		

**TABEAU 7.20 – Fréquences propres et amortissements modaux et déformées modales du 2<sup>ème</sup> mode propre déterminés avec la TO à partir des signaux des accéléromètres, des jauges ponctuelles et des jauges longue base pour la poutre E-E saine.**

Sur la figure 7.20, les déformées modales identifiées pour le 1<sup>er</sup> mode sont représentés pour les capteurs ponctuels, les JP et les JLB. Pour les graphes concernant les JLB, la courbe tracée pour chacun des modes en pointillés est la courbure modale  $\phi_k''(x)$ . Cela permet de montrer la forme particulière les déformées modales obtenues à partir de mesures de JLB. La valeur de la déformée est l'intégrale de la courbure modale et elle est associée non pas à un point mais à la base de mesure de la jauge. L'allure sera alors une courbe en forme de marches d'escalier ou de diagramme en barres [18].



**FIGURE 7.20 – Déformées modales normalisées du premier mode propre obtenues avec les différents types de capteurs pour la poutre saine**

Capteur	Mode n° 3					
	$f_3(Hz)$		$\varepsilon_3(\%)$		$\Phi_3$	
	Moyenne	$\Delta\sigma/\sigma\%$	Moyenne	$\Delta\sigma/\sigma\%$	Moyenne	$\Delta\sigma/\sigma\%$
Acc. n° 1	405.13	0.20	0.65	3.70	-0.08	1.19
Acc. n° 2	405.15	0.20	0.64	3.70	-0.68	0.16
Acc. n° 3	405.15	0.20	0.64	3.70	-1.00	0.00
Acc. n° 4	405.15	0.20	0.64	3.71	-0.47	0.12
Acc. n° 5	405.15	0.20	0.64	3.70	0.47	0.37
Acc. n° 6	405.15	0.20	0.64	3.70	0.94	0.04
Acc. n° 7	405.15	0.20	0.64	3.76	0.48	0.12
Acc. n° 8	405.15	0.20	0.64	3.64	-0.46	0.09
Acc. n° 9	405.15	0.20	0.64	3.69	-0.98	0.07
Acc. n° 10	405.15	0.20	0.64	3.71	-0.70	0.26
Acc. n° 11	405.15	0.20	0.65	3.75	-0.10	1.06
<b>Moy. Acc</b>	<b>404.02</b>	<b>0.20</b>	<b>0.64</b>	<b>3.71</b>		
JP. n° 1	404.01	0.20	0.70	11.23	0.91	2.99
JP. n° 2	404.02	0.22	0.67	19.32	-0.31	8.29
JP. n° 3	403.94	0.20	0.69	11.06	-0.81	3.62
JP. n° 4	404.02	0.21	0.68	15.16	-0.45	6.67
JP. n° 5	404.06	0.21	0.70	14.47	0.52	3.92
JP. n° 6	404.04	0.20	0.69	10.26	1.00	0.00
JP. n° 7	404.04	0.21	0.70	14.00	0.50	3.97
JP. n° 8	403.94	0.23	0.68	14.34	-0.44	5.74
JP. n° 9	403.97	0.21	0.69	11.04	-0.86	3.65
JP. n° 10	403.98	0.22	0.70	17.17	-0.34	6.31
JP. n° 11	404.01	0.21	0.70	12.16	0.83	3.69
<b>Moy. JP</b>	<b>404.00</b>	<b>0.21</b>	<b>0.69</b>	<b>13.66</b>		
JLB. n° 1	403.97	0.25	0.69	24.97	0.26	7.27
JLB. n° 2	403.95	0.21	0.69	11.08	-0.81	4.12
JLB. n° 3	403.99	0.21	0.69	10.12	-0.89	3.65
JLB. n° 4	404.33	0.37	0.17	614.02	0.01	598.10
JLB. n° 5	404.03	0.20	0.69	10.74	1.00	0.74
JLB. n° 6	403.98	0.20	0.69	11.35	0.95	3.47
JLB. n° 7	404.11	0.31	0.70	59.29	0.09	30.81
JLB. n° 8	403.96	0.21	0.70	12.45	-0.89	3.75
JLB. n° 9	403.99	0.20	0.70	11.76	-0.87	3.62
JLB. n° 10	404.21	0.21	0.69	19.06	0.36	7.32
<b>Moy. JLB</b>	<b>404.05</b>	<b>0.24</b>	<b>0.64</b>	<b>78.48</b>		

**TABEAU 7.21 – Fréquences propres et amortissements modaux et déformées modales du 3<sup>ème</sup> mode propre déterminés avec la TO à partir des signaux des accéléromètres, des jauges ponctuelles et des jauges longue base pour la poutre E-E saine.**

## 7.6 Détection d'endommagement par les méthodes utilisant les paramètres modaux

Dans cette partie, nous allons utiliser quelques méthodes de détection d'endommagement pour la poutre E-E trouée. Le trou se situe entre les accéléromètres n° 5 et n° 6, entre les JP n° 5 et n° 6 et au niveau de la JLB n° 5.

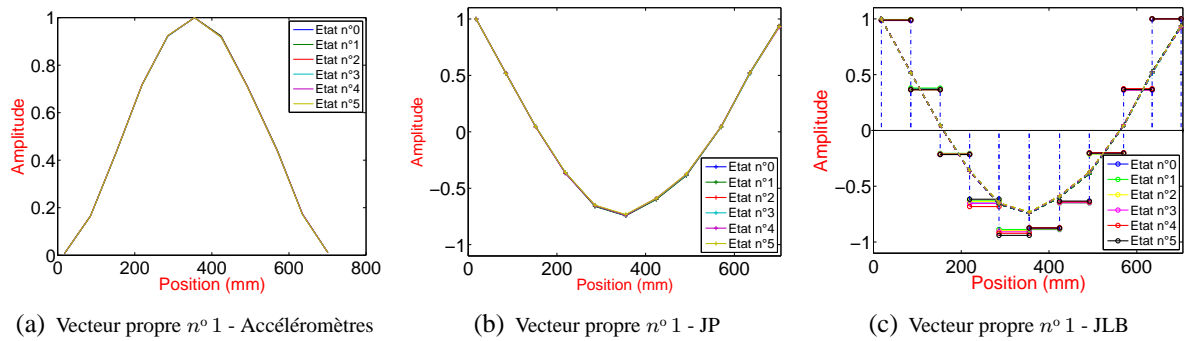
Les paramètres modaux identifiés par la TO sur les essais les plus fiables et répétables pour chaque état seront employés dans les différentes méthodes d'évaluation d'endommagement. Les indicateurs d'endommagement sont obtenus avec les 3 premiers modes. L'état de référence sera celui de la poutre saine.

Le tableau 7.22 reporte les fréquences propres et les variations relatives associées pour chacun des cas.

Les figures 7.21, 7.22 et 7.23 illustrent les déformées modales, normalisées par rapport au maximum, obtenues pour les trois premiers modes et les 6 états de la poutre avec les accéléromètres, les jauges ponctuelles et les jauges longue base. Sur les figures 7.21(b), 7.22(b) et 7.23(b) les courbes tracées en pointillé représentent respectivement les courbures modales  $\phi_1''(x)$ ,  $\phi_2''(x)$  et  $\phi_3''(x)$  pour la poutre

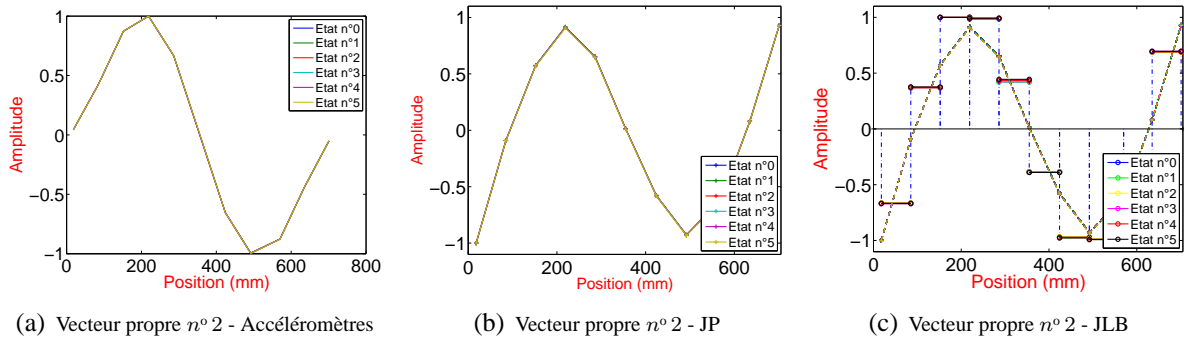
	Fréquences (Hz)								
	1 <sup>ère</sup>			2 <sup>ème</sup>			3 <sup>ème</sup>		
	Acc.	JP	JLB	Acc.	JP	JLB	Acc.	JP	JLB
<b>Poutre intacte</b>	74.56	74.52	74.52	205.92	205.84	205.83	403.65	403.64	403.60
<b>Cas 1</b>	74.30	74.26	74.26	205.73	205.67	205.64	403.78	403.60	403.59
Changement (%)	0.35	0.34	0.35	0.09	0.08	0.09	0.03	0.01	0.02
<b>Cas 2</b>	75.48	75.43	75.42	206.87	206.79	206.78	404.92	404.80	404.72
Changement (%)	1.23	1.23	1.21	0.46	0.46	0.46	0.31	0.29	0.28
<b>Cas 3</b>	74.98	74.91	74.91	206.19	206.11	206.10	403.64	403.51	403.63
Changement (%)	0.56	0.52	0.52	0.13	0.13	0.13	0.00	0.03	0.06
<b>Cas 4</b>	75.91	75.80	75.80	207.71	207.39	207.45	405.55	405.04	405.03
Changement (%)	1.80	1.72	1.72	0.87	0.75	0.79	0.47	0.35	0.35
<b>Cas 5</b>	76.14	76.03	76.03	208.04	207.83	207.79	405.65	405.28	405.22
Changement (%)	2.12	2.03	2.02	1.03	0.97	0.95	0.49	0.41	0.40

**TABEAU 7.22 – Fréquences propres et variations relatives pour les 5 cas d'endommagement à partir des trois types de capteurs**



**FIGURE 7.21 – Déformées modales normalisées du premier mode propre obtenues avec les différents types de capteurs et les 6 états de la poutre**

E-E.



**FIGURE 7.22 – Déformées modales normalisées du deuxième mode propre obtenues avec les différents types de capteurs et les 6 états de la poutre**

Les indicateurs d'endommagement seront normalisés par rapport au maximum afin de mieux visualiser leurs variations. La figure 7.24 montre les différences de déformées modales obtenues avec les accéléromètres. La déviation du mode propre à la position du trou ( $x_0 = 0.321$ ) est très petite et n'est pas détectable. On voit que la valeur maximale se trouve au capteur n° 10. Notons que la détection sera faussée si le défaut se situe au niveau du capteur servant à la normalisation de la déformée modale [8].

Ceci est confirmé par les graphes de figure 7.25 qui montrent les coefficients de MAC et COMAC

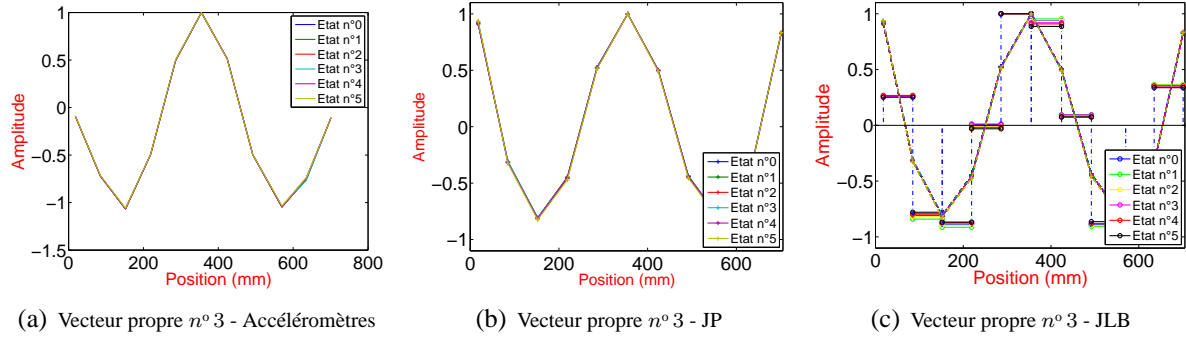


FIGURE 7.23 – Déformées modales normalisées du troisième mode propre obtenues avec les différents types de capteurs et les 6 états de la poutre

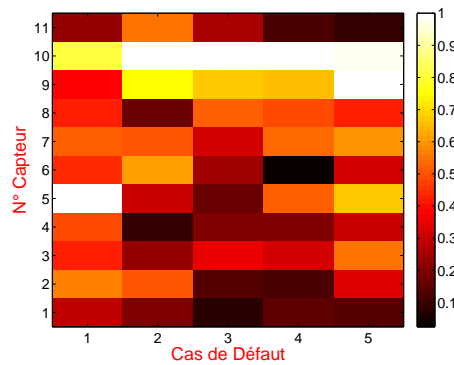


FIGURE 7.24 – Différences de déformées modales normalisées obtenues avec les accéléromètres

indiquant le degré de corrélation entre les déformées modales mesurées pour les 5 états endommagés et les trois premiers modes propres mesurés. A partir des accéléromètres et des deux types de jauges les coefficients obtenus montrent quelques variations à la position réelle du trou. Ce changement est plus élevé à l'état 5 de la poutre. Comme prévu, cette variation est faible et n'indique pas nécessairement la présence d'un endommagement, car elle peut-être également présente entre deux déformées modales provenant de deux essais du même état.

### Flexibilité

La figure 7.26 présente les résultats obtenus pour la méthode de flexibilité donnée par l'expression (Eq. (7.3)).

$$F = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\omega_k^2} \phi_k \phi_k^T \quad (7.3)$$

La méthode de flexibilité ne permet pas de distinguer la zone endommagée, ce qui correspond au résultat numérique. Les valeurs maximales des changements de flexibilité obtenues par les trois types de capteurs se trouvent dans la zone du trou mais de fausses zones endommagées apparaissent également. La méthode présente alors un handicap à localiser précisément le défaut.



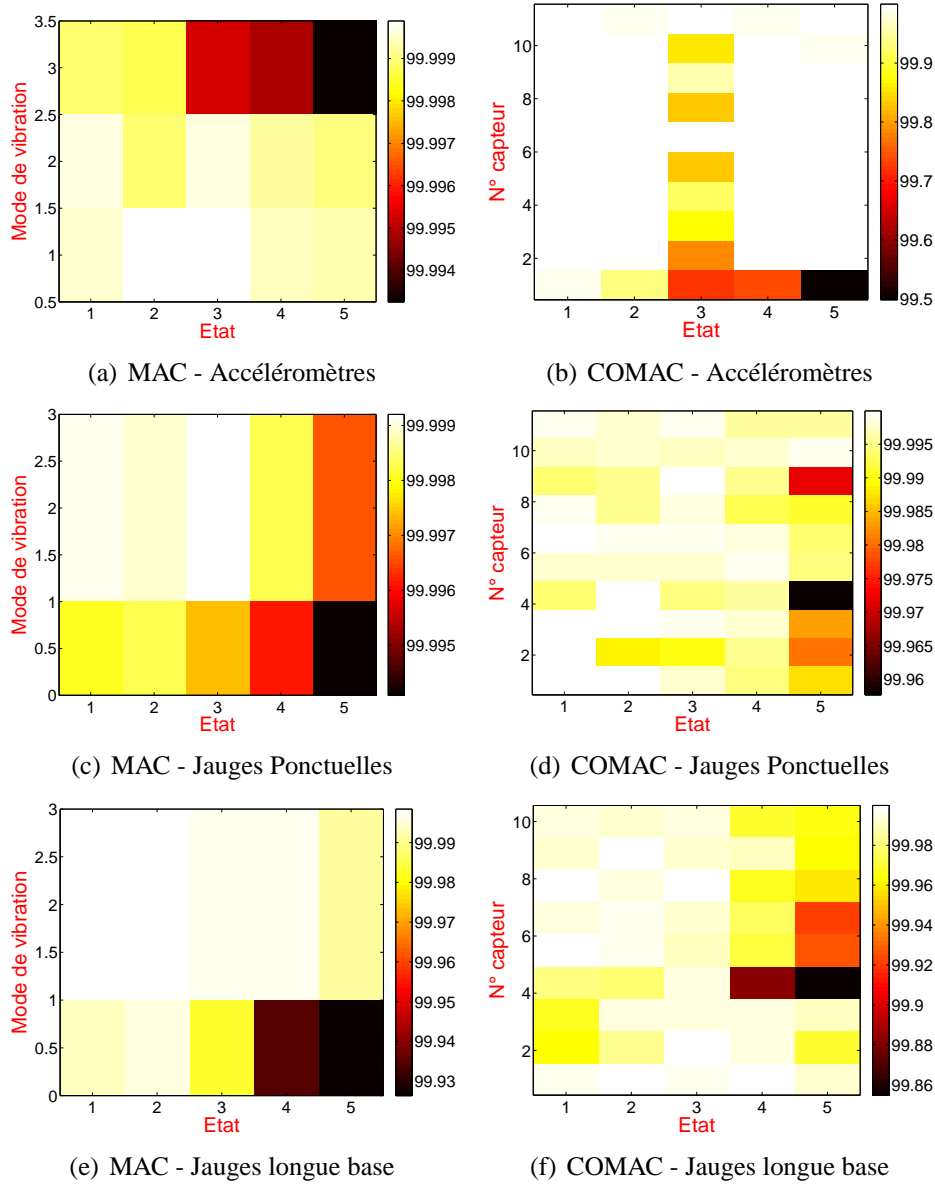


FIGURE 7.25 – Coefficients MAC et COMAC

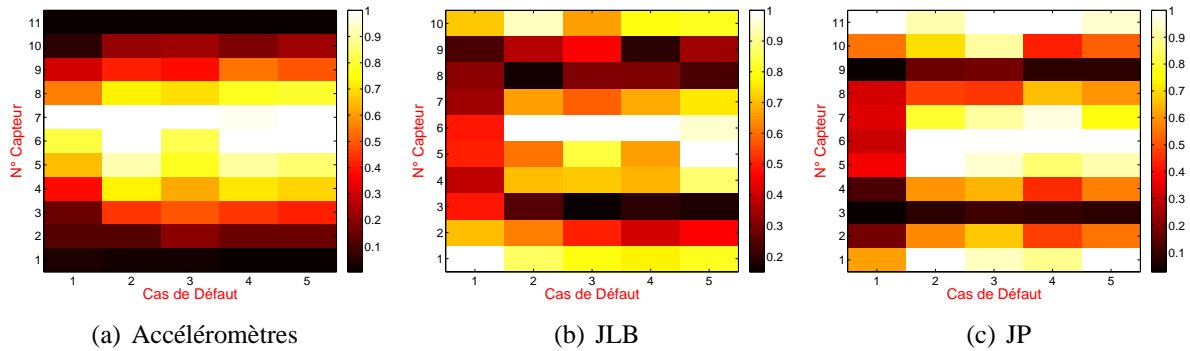


FIGURE 7.26 – Différences de flexibilité normalisées obtenues avec les différents capteurs

## 7.7 Détection d'endommagement par les méthodes utilisant la courbure modale

Dans cette section trois méthodes sont testées qui sont fondées sur la courbure modale : courbure des déformées modales, courbure de flexibilité et énergies de déformation modale. La détection et

localisation sont considérées précises lorsque les valeurs maximales des critères se trouvent dans la zone endommagée.

### 7.7.1 Courbure modale

Pour les cinq états endommagés de la poutre, la différence de courbure modale obtenue à partir des accéléromètres (Eq. (7.4)) et les intégrales de courbures modales (Eq. (7.5)) mesurées par les jauges ponctuelles et les jauges longue base sont illustrées sur la figure 7.27. Les résultats dispersés ne sont pas surprenants a priori et corrélient bien avec les résultats numériques. Les mesures bruitées et le nombre de capteurs insuffisant perturbent la détection et la localisation des endommagements par cette méthode.

$$\Delta^{CM}(i) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |\phi''_{ik} - \phi''_{ik}^*| \quad (7.4)$$

$$\Delta^{JLB}(i) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |\Psi_{ik} - \Psi_{ik}^*| \quad (7.5)$$

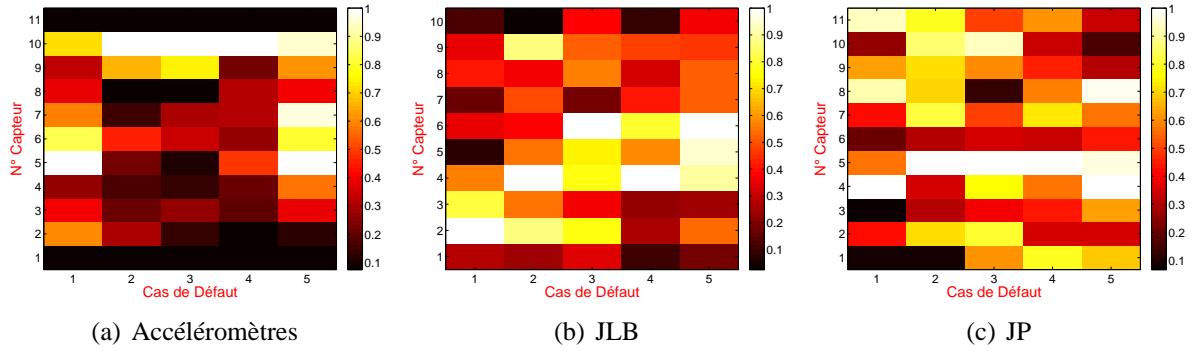


FIGURE 7.27 – Différences de courbure modale obtenues avec les différents types de capteurs

### 7.7.2 Courbure de Flexibilité

La méthode de courbure de flexibilité, donnée par l'expression (Eq. (7.6)), est illustrée sur la figure 7.28. La méthode semble présenter une performance accrue par rapport à la méthode de courbure des déformées modales, ceci s'accorde bien avec l'étude numérique réalisée au Chapitre 4. Le changement maximal obtenu par les accéléromètres se trouve au niveau du capteur  $n^{\circ} 7$  ce qui n'est pas réellement la position du trou, mais quand même la méthode a permis d'envisager la zone endommagée. Par contre, le changement maximal obtenu les JP et les JLB se trouve approximativement dans la zone où se situe du trou (entre les capteurs  $n^{\circ} 5$  et  $n^{\circ} 6$ ), cependant de fausses détection sont toujours présentes, qui peuvent provenir des erreurs sur paramètres modaux.

$$f''_i = \frac{f_{i-1,i-1} - 2f_{i,i} + f_{i+1,i+1}}{h^2} \quad (7.6)$$

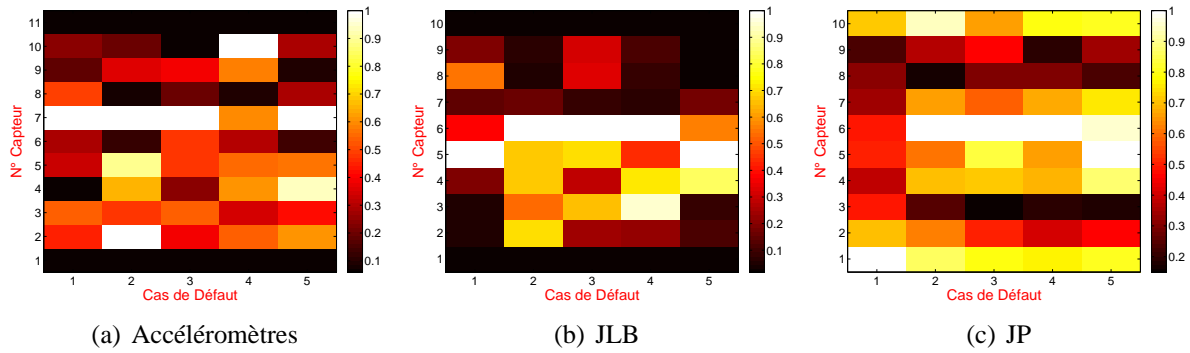


FIGURE 7.28 – Différences de courbure de flexibilité obtenues avec les différents types de capteurs

### 7.7.3 Energie de déformation modale

Les résultats obtenus pour l'énergie de déformation modale sont présentées sur la figure 7.29. L'application de l'indicateur basée sur le changement de l'énergie de déformation exprimée dans l'équation 9.10(d) a présenté une bonne précision par rapport aux méthodes précédentes pour localiser les modifications structurales dans le cas des JLB et pour les différents cas de défauts. Pour les résultats des JP, on voit que pour des cas de défauts sévères ( $n^{\circ} 4$  et  $n^{\circ} 5$ ), les détections et les localisations sont faussées. Ceci peut provenir d'un niveau de bruit de mesure plus élevé lors de ces essais. Cependant, à partir des accéléromètres, une dispersion importante apparaît. La valeur maximale se trouve entre les capteurs  $n^{\circ} 5$  et  $n^{\circ} 6$  pour les deux cas de défauts sévères, alors que pour les trois premiers cas de défaut, de fausses détections et localisations apparaissent

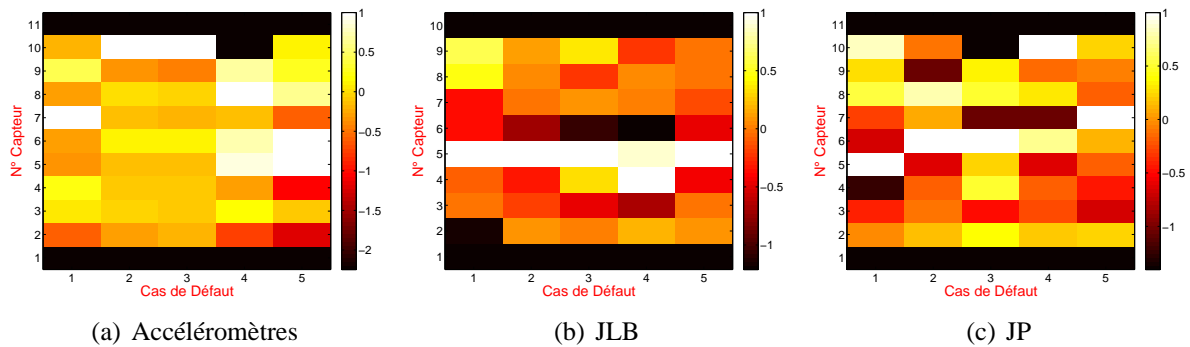


FIGURE 7.29 – Changements de l'énergie de déformation modale obtenues par les différents types de capteurs

### 7.7.4 Etude mode par mode

Nous avons démontré au travers des simulations numériques (Chapitre 4) que la probabilité de détection par les capteurs longue base est plus élevée que celle obtenue par les capteurs ponctuels. A partir des accéléromètres, l'obtention de détections très dispersées n'est pas surprenante a priori. Cependant, la faible sensibilité des JLB pour quelques méthodes est plus surprenante.

Pour cela nous avons analysé mode par mode les résultats obtenus à partir des différentes méthodes de détection. Les figures 7.30, 7.31 et 7.32 présentent les résultats obtenus pour les 3 premiers modes à partir des différentes méthodes de détection et des différents types de capteurs.

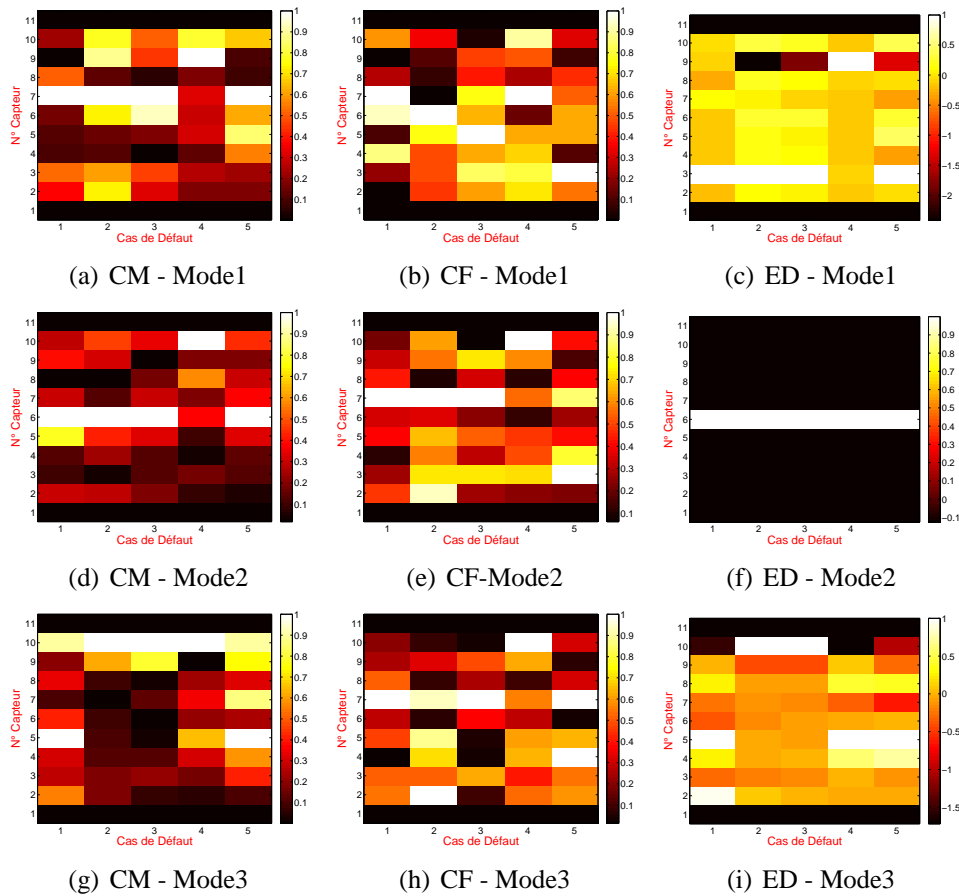


FIGURE 7.30 – Résultats des méthodes de détection obtenues pour chaque mode propre avec les accéléromètres

L'analyse séparée mode par mode montre que certains modes sont plus sensibles que d'autres au défaut. Nous remarquons par exemple que l'indicateur d'endommagement fondée sur l'énergie de déformation, obtenu avec les accéléromètres, est très sensible pour le deuxième mode (niveau de détection très élevé). Ceci peut provenir de la présence du défaut au niveau d'un nœud du mode propre ce qui peut fausser les détections.

Les modes n'ont pas permis de localiser une localisation satisfaisante, voire même certains modes localisent des zones totalement erronées.

Par contre, pour les deux types de jauges, cette étude met en évidence que c'est le mode  $n^{\circ} 3$  qui introduisait des perturbations dans le calcul des indicateurs d'endommagement.

*En conclusion, les résultats sont décevants mais un peu prévisibles du fait du nombre de capteurs trop faible et du bruit de mesure élevé sur les jauges. Selon Sazonov le nombre de capteur recommandé pour observer trois modes propres, en fonction du bruit existant, est de 15. Nous avons vu que l'utilisation d'un critère de détection d'endommagement global n'est pas très fiable, car certains modes perturbent les résultats, par exemple lorsque le défaut est proche du nœud d'un mode. Les JLB ont fourni de meilleures détection et localisation du défaut que les autres types de capteurs.*

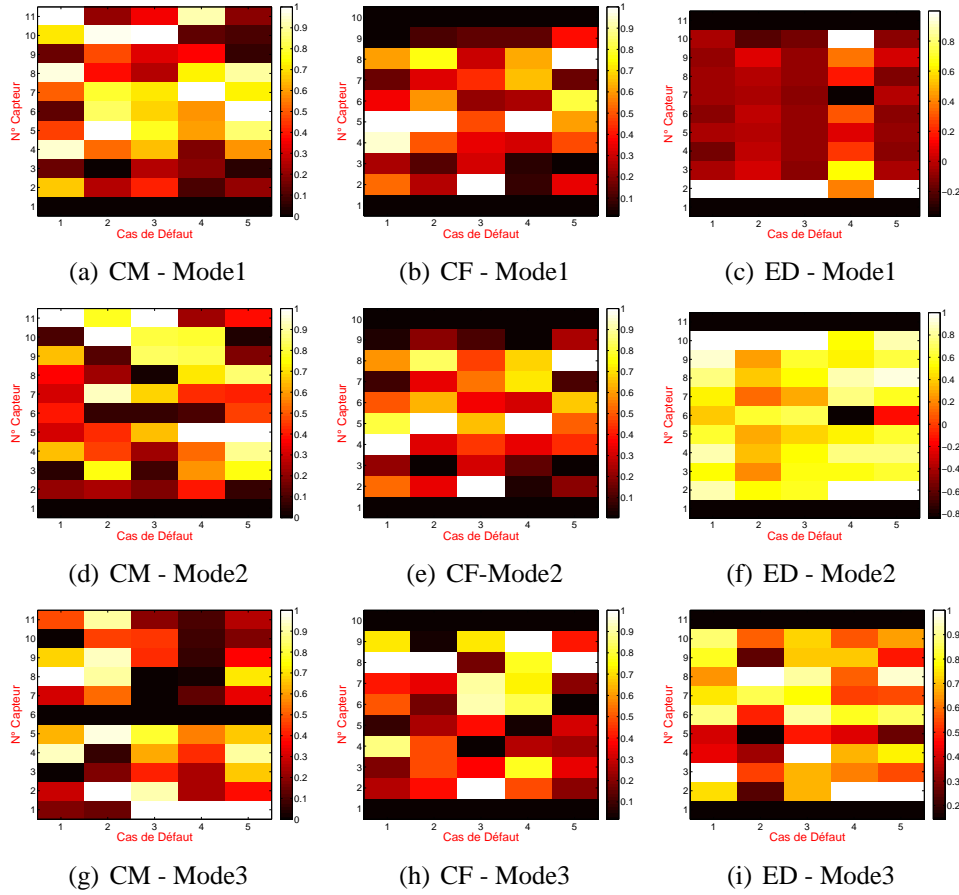


FIGURE 7.31 – Résultats des méthodes de détection obtenues pour chaque mode propre avec les JP

## 7.8 Détection d'une modification structurale à partir du filtrage modal

Comme déjà mentionné au Chapitre 2, cette technique s'appuie sur l'utilisation d'un nombre élevé de capteurs  $n$  (figure 2.11) qui sont combinés linéairement par la formule 7.7. Cette combinaison permet d'effectuer un filtrage modal qui isole un mode  $l$  déterminé. En première partie, nous allons étudier le changement présent entre deux essais d'un même état et puis comparer deux états différents (état sain et état endommagé) pour vérifier s'il y a un défaut dans le deuxième état afin d'ensuite le localiser et le quantifier.

$$y = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i \quad (7.7)$$

Dans notre étude, nous utilisons les trois premiers modes identifiés par la TO dans la section précédente par analyse modale.

A partir des signaux enregistrés par les accéléromètres et du signal de force généré par le pot vibrant, nous avons évalué les fonctions de réponses en fréquences correspondantes. De plus, les coefficients du filtrage modal  $\alpha$  sont déterminées à partir des paramètres modaux identifiés en appliquant la SVD sur la matrice des modes propres.

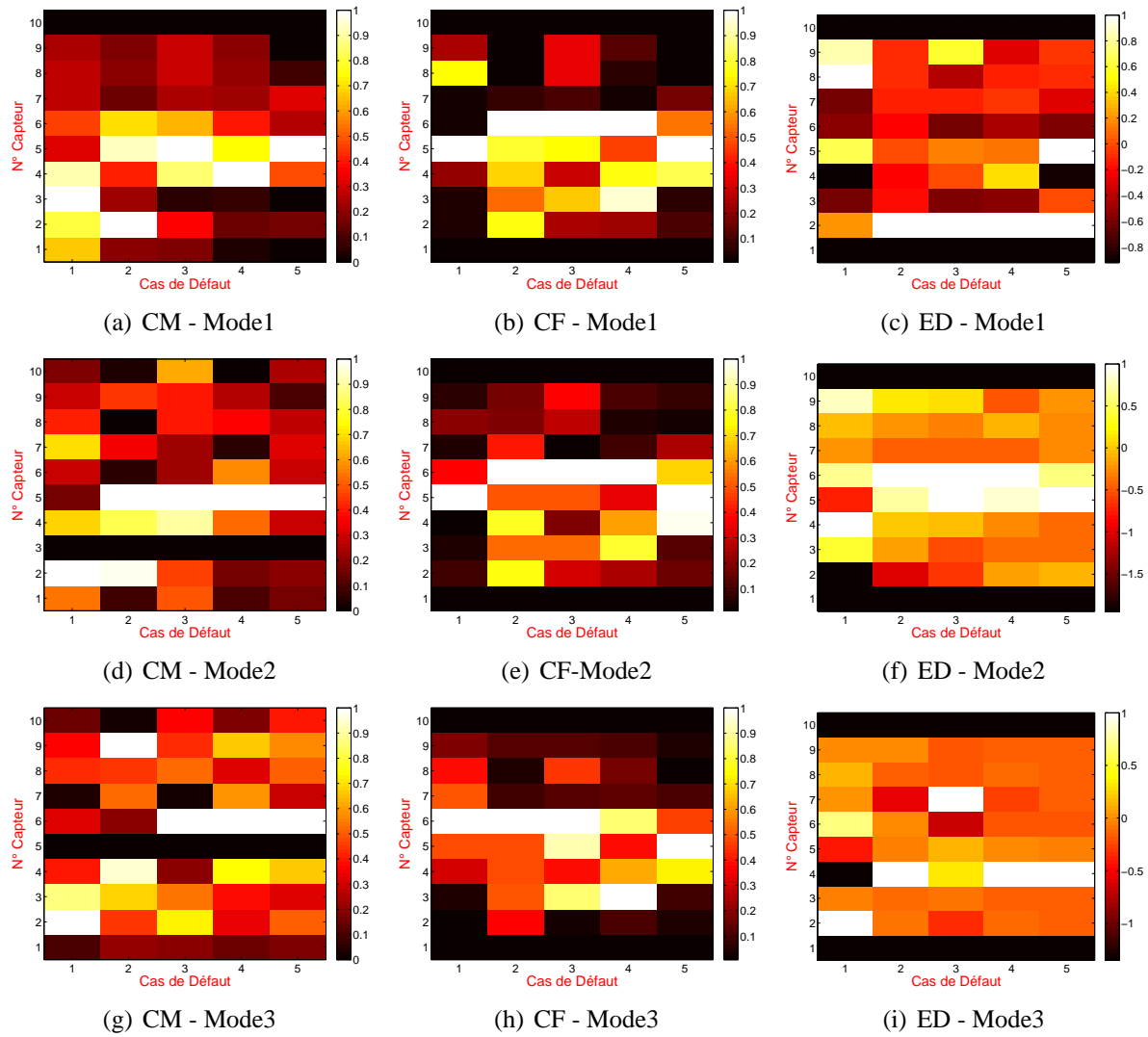


FIGURE 7.32 – Résultats des méthodes de détection obtenues pour chaque mode propre avec les JLB

Le traitement des 100 premiers essais de la poutre par analyse modale a fourni au niveau des fréquences propres des résultats surprenants. Une variation de la valeur des trois premières fréquences propres en fonction du temps, sur deux journées, est observée. Pour comprendre ce phénomène, le filtrage modal est utilisé pour détecter un changement global que la poutre a subi. Deux cas se posent : changement de température au sein de la salle d'expérimentation ou changement au niveau des encastremements (conditions aux limites).

A. Deraemaeker et A. Peumont [9] ont démontré théoriquement et numériquement qu'un changement local et un changement global (qui est essentiellement un changement de température) de la structure peuvent être distingués. Quand le changement est local, des pics apparaissent dans la réponse filtrée pour un mode déterminé alors que lorsque la variation est globale, le filtre modal est décalé en fréquence mais la forme n'est pas modifiée.

### 7.8.1 Détection à partir d'une série d'essais sur la poutre saine

La méthode utilisant le filtrage modal nécessite la connaissance de la FRF. Afin d'obtenir la fonction de transfert  $H_1$ , la relation (7.8) est utilisée :

$$H_1^{(i)}(\omega) = \frac{G_{fu}^{(i)}(\omega)}{G_{ff}^{(i)}(\omega)} \quad (7.8)$$

où  $G_{fu}(\omega) = \overline{F}(\omega).U(\omega)$  et  $G_{ff}(\omega) = F(\omega).\overline{F}(\omega)$  sont respectivement l'interspectre et l'autospectre.  $U$  et  $F$  étant les TF respectives du signal d'accélération et du signal de force. L'indice  $i$  correspond au numéro de l'essai.

Les figures 7.33(a), 7.33(b) et 7.33(c) montrent les FRFs des filtres modaux pour les 100 essais de l'état sain, isolant les modes 1, 2 et 3 respectivement. Afin de mieux visualiser les résultats, la technique est appliquée sur seulement 30 essais de l'état sain. Les figures 7.34(a), 7.34(b) et 7.34(c) illustrent les FRFs pour ces essais. Les courbes en bleu représentent des essais répétables (n°1 à n°10) en termes de paramètres modaux obtenus et les courbes en rouge représentent les réponses du filtre appliqué aux essais n°61 à n°80, pour lesquels une diminution de fréquence est observée.

Selon [9], s'il y a présence d'un changement local dans la poutre, des pics parasites apparaîtront sur la réponse du filtre modal au niveau des fréquences propres non filtrées.

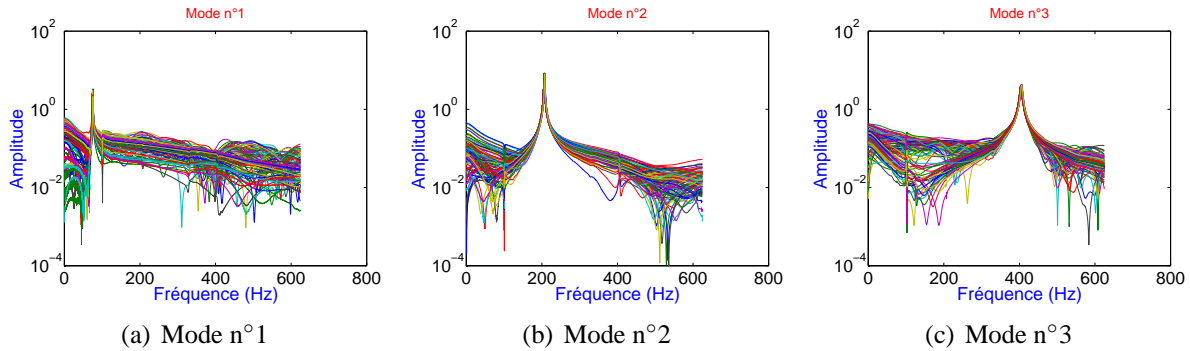
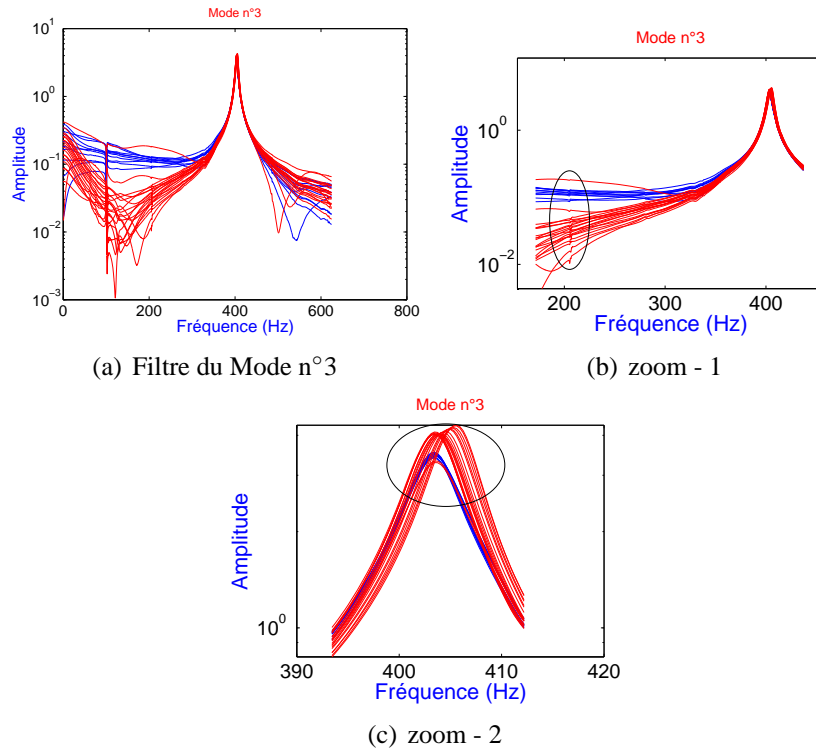


FIGURE 7.33 – Filtrage des 3 premiers modes à partir des signaux d'accélération pour les 100 essais de l'état sain

Nous remarquons des pics qui apparaissent au niveaux des fréquences non filtrées. Cependant, en effectuant un zoom, une déviation est claire au niveau de la fréquence propre correspondant au mode pour lequel le filtrage modal est appliqué, ce qui peut être expliqué par un changement de température ou une faible variation au niveau des encastresments de la poutre.

### 7.8.2 Détection à partir d'une série d'essais de l'état sain et des états endommagés

Ayant trouvé les FRF des essais répétables des états endommagés, la figure 7.35 compare l'état sain et les états endommagés. La figure 7.36 est un zoom de la figure 7.35 afin d'observer les variations.



**FIGURE 7.34 – Filtrage modal appliqué au 3<sup>ème</sup> mode propre à partir des signaux d’accélération provenant de 30 essais de l’état sain**

On remarque que par rapport à la FRF, la FRF du filtre modal obtenu pour l’état sain, celles obtenues pour les états endommagés montrent clairement des pics au niveau des fréquences propres filtrées. La présence d’un défaut peut être détecté a priori. On remarque que des pics apparaissent dans d’autres endroits, mais nous n’avons pas trouvé une explication à ceci.

## 7.9 Application de méthodes fondées sur la courbure de TF

Dans ce paragraphe, nous appliquerons des méthodes utilisant la TF des différents capteurs pour détecter et localiser l’endommagement. Cette méthode a été développée par Maia, Sampaio et Silva [12] pour le cas d’une poutre L-L et cette dernière a été également testée sur le pont I-40 aux Etats Unis.

La figure 7.37 montre les TF obtenues pour 30 essais à partir des accéléromètres, des JP et des JLB pour la poutre saine et les états endommagés. La courbure de la transformée de Fourier est obtenue en appliquant la différence finie centrée (Eq. 7.9).

$$H''_{j\omega}(i) = \frac{H''_{j\omega}(i+1) - 2H''_{j\omega}(i) + H''_{j\omega}(i-1)}{h^2} \quad (7.9)$$

L’influence de la bande de fréquence sur la localisation du défaut a déjà été étudié numériquement. Il a été démontré dans la littérature que la méthode donne de résultats plus fiables pour un intervalle de fréquences avant la première fréquence propre. Ainsi la bande de fréquences choisie pour le calcul est [24Hz - 62Hz] (première fréquence propre égale à 74.56Hz).



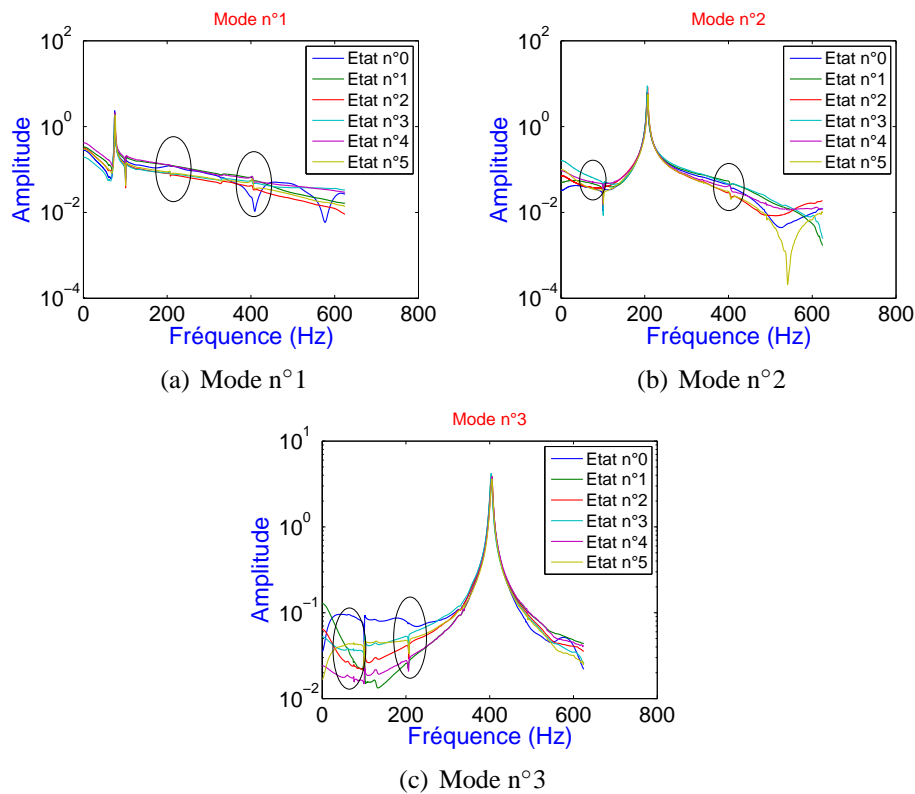


FIGURE 7.35 – Filtrage modal appliqué aux 3 premiers modes à partir des signaux d'accélération, provenant de la moyenne des essais répétables pour les différents états de la poutre

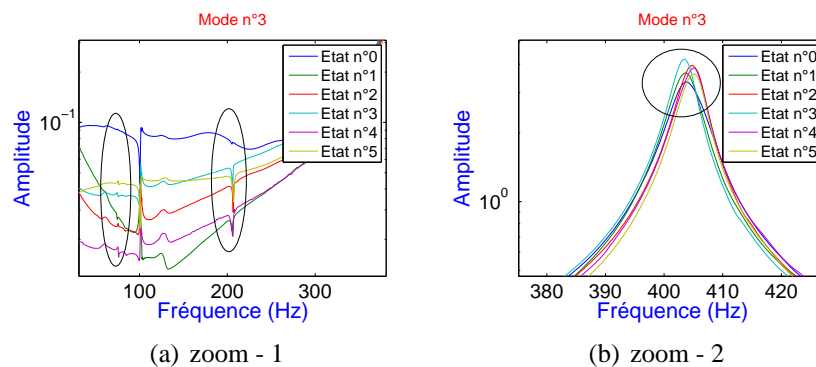


FIGURE 7.36 – Filtrage modal appliqué au 3<sup>ème</sup> mode à partir des signaux d'accélération, provenant de la moyenne des essais répétables pour les différents états de la poutre - zoom

Du fait de la différence finie centrée, les valeurs de courbure de réponse en fréquence ne seront pas déterminées pour les capteurs proches des extrémités de la poutre. Donc 9 accéléromètres donneront l'information.

Nous avons proposé de calculer les courbures des TF, et non des FRFs, fournies par les accéléromètres. Le fait que la technique est fondée sur des différences de TF entre état sain et état endommagé, pour un intervalle de fréquence choisie, les TF obtenues par les deux types de jauges sont assez bruitées et ne permettront pas de fournir des résultats satisfaisants.

La figure 7.38 montre les différences absolues de courbure de TF et d'énergie de courbure de TF obtenus à partir des accéléromètres pour les différents états endommagés. Il est bien clair que les

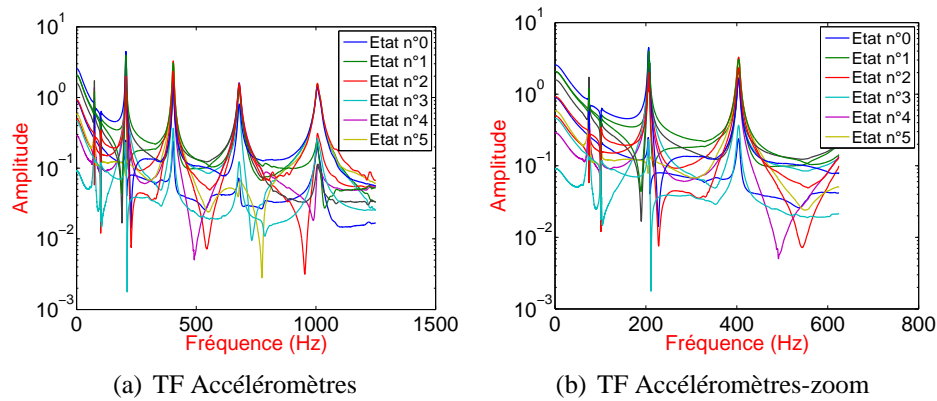


FIGURE 7.37 – Moyenne des TF obtenues à partir des accéléromètres pour la poutre saine et les différents cas de défaut

deux méthodes permettent de détecter et de localiser l'endommagement. La valeur égale à 1 se trouve entre les capteurs 5 et 6 qui correspond à la position du trou. Pour la localisation, les différences de l'énergie de la courbure de TF donnent de meilleurs résultats car la valeur maximale se trouve sur une zone restreinte autour du trou.

L'inconvénient de ces deux méthodes est que la procédure d'obtention des courbures modales ne permettra pas de détecter des défauts aux bords de la structure étudiée. L'avantage par contre se trouve dans le fait qu'elles ne nécessitent pas d'identification des paramètres modaux ce qui est le cas des autres méthodes de détection.

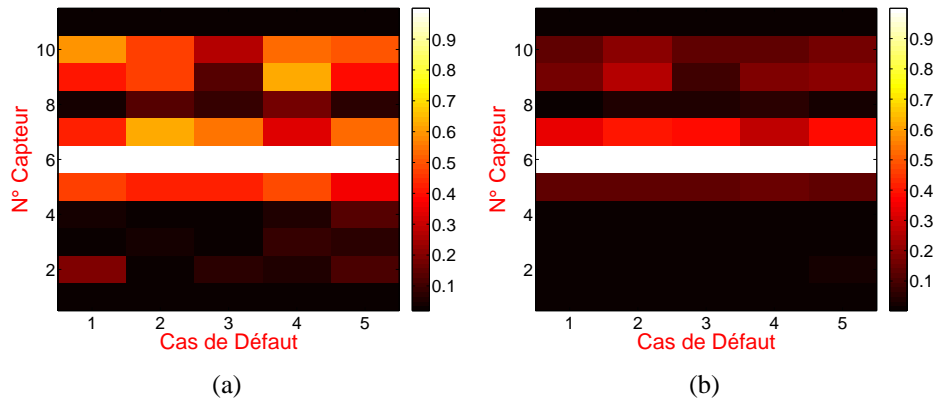


FIGURE 7.38 – (a) Différences de courbures de TF (b) Différences de l'énergie de courbure de TF obtenues à partir des accéléromètres

## 7.10 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les résultats de détection et de localisation d'un trou de différents diamètres sur une poutre en aluminium E-E montée au sein du laboratoire. Les trois types de capteurs (accéléromètres, jauges longue base et jauges ponctuelles) ont donné des fréquences propres assez proches. Nous avons supposé que lorsque la valeur maximale du critère se trouve au niveau du capteur autour duquel est situé le trou, la méthode a pu détecter et localiser. La flexibilité, qui utilise les fréquences propres et les modes propres, a donné des résultats dispersés comme par l'étude

numérique mais la valeur maximale se trouve dans la région où le trou est situé. L'application de la courbure de flexibilité, qui utilise la courbure de la matrice de flexibilité obtenue des différents capteurs, a fourni des résultats satisfaisants pour les JLB et les JP. La valeur maximale se trouvent autour de la position du trou (entre les capteurs  $n^{\circ} 5$  et  $n^{\circ} 6$ ) pour tous les états, alors que les accéléromètres donnent une position incorrecte avec de fausses détections. Ceci s'explique par le fait que l'utilisation directe des déformées modales n'est pas très fiable pour la détection et la localisation d'endommagement, alors que les JLB et les JP qui fournissent directement une intégrale de courbure modale sont plus performantes. Ce résultat est le même pour l'énergie de déformation qui est fondée sur l'intégrale des courbures modales. D'autre part, en tentant d'analyser mode par mode les méthodes, sans nous baser sur un indicateur unique sommant les contributions de tous les modes étudiés, nous avons trouvé qu'il y a des modes qui perturbent la détection et la localisation et que certains modes sont plus sensibles à l'endommagement que d'autres.

Pour l'application de la courbure de TF, qui n'utilise que la TF du signal mesuré par le capteur, les résultats étaient assez satisfaisants. Les deux méthodes (courbure de TF et énergie de courbure de TF) ont pu localiser le trou avec précision à partir des accéléromètres. Par ailleurs, l'application du filtrage modal aux modes propres, a permis de discerner les changements globaux qui apparaissent entre des essais de l'état sain des changements locaux apparaissant entre des essais des différents états endommagés de la poutre. Nous avons conclu que des changements de température ou des conditions d'encastres de la poutre ont été présents durant les essais ce qui a dispersé les résultats. En conclusion les résultats de détection et localisation ont tendance à s'améliorer significativement en instrumentant la poutre par un nombre de capteurs plus élevé et lorsque ces capteurs ont un rapport signal sur bruit plus important.

# Bibliographie

- [1] Cumunel G., Delepine-Lesoillea S., Argoul P., *Long-gage optical fiber extensometers for dynamic evaluation of structures*, Sensors and Actuators A : Physical, 184, pp. 1-15, 2012.
- [2] Sazonov E., Klinkhachorn P., *Optimal spatial sampling interval for damage detection by curvature or strain energy mode shapes*, Journal of Sound and Vibration, 285(4-5), pp. 783-801, 2004.
- [3] Le T.P., *Auscultation dynamique des structures à l'aide de l'analyse continue en ondelettes*, Thèse, ENPC, 2003.
- [4] Lardies J., Ta M.N., Berthillier M., *Modal parameter estimation based on the wavelet transform of output data*, Archive of Applied Mechanics, 73, pp. 718-733, 2004.
- [5] Le T.P., Argoul P., *Continuous wavelet transform for modal identification using free decay response*, Journal of Sound and Vibration, 277, pp. 73-100, 2004.
- [6] Erlicher S., Argoul P., *Modal identification of linear non-proportionally damped systems by wavelet transform*, Mechanical Systems and Signal Processing, 21(3), 1386-1421, 2007.
- [7] Robert P., *Des jauges, des ponts... et une solution de câblage pour chaque cas*, MESURES 767, HBM France, 2004.
- [8] Cumunel G., *Extensomètres à fibre optique Longue Base (ELB) pour l'évaluation dynamique des structures*, Thèse, ENPC, 2008.
- [9] Deraemaeker A., Preumont A., *Vibration based damage detection using large array sensors and spatial filters*, Mechanical Systems and Signal Processing, 20(7), pp. 1615-1630, 2006.
- [10] Chelidze D., Zhou W., *Smooth orthogonal decomposition-based vibration mode identification*, Journal of Sound and Vibration, 292(3), pp. 461-473, 2006.
- [11] Farooq U., Feeny BF., *Smooth orthogonal decomposition for modal analysis of randomly excited systems*, Journal of Sound and Vibration, 316(1), pp. 137-146, 2008.
- [12] Sampaio R.P.C., Maia N.M.M., Silva J.M.M., *Damage detection using the frequency-response-function curvature method*, Journal of Sound and Vibration, 226(5), pp.1029-1042, 1999.
- [13] Le T.T.H., *Contribution à la détection et à la localisation d'endommagements par des méthodes d'analyse dynamique des modifications structurales d'une poutre avec tension - Application au suivi des câbles du génie civil*, Thèse, ENPC, 2014.
- [14] De Moor B., Moonen M., Vandenberghe L., Vandewalle, J. *Identification of linear state space models with svd using cononical correlation analysis*, Singular Value Decomposition and Signal Processing, pp. 161-169, 1988.

- [15] Van Overchee P. De Moor, B. *Subspace identification for linear systems : Theory - Implementation - Applications*, Kluwer Academic Publisher, 29(3), 649-660, 1996.
- [16] Basseville M., Benveniste A., Goursat M., Hermans L., Mevel L., Van Der Auweraer H. *Output-only subspace-based structural identification : from theory to industrial testing practice*, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, 4, pp. 668-676, 2001.
- [17] Garibaldi L., Marchesoello S., *Subspace-based identification of nonlinear structures*, Shock and Vibration, 15(3-4), pp. 345-354, 2008,
- [18] Calvert S., Conte J.P., Moaveni B., Schulz W.L., de Callafon R., *Real time damage assessment using fiber optic grating sensors*, Proceedings of SPIE, Vol. 5278, 2003.

## Chapitre 8

# Analyse vibratoire par corrélation d'images

---

**C**<sup>E CHAPITRE</sup> est consacré à l'analyse vibratoire par corrélation d'images. Tout d'abord une description succincte des concepts de la technique utilisée pour la corrélation d'images est réalisée. Cette description est suivie de quelques exemples d'application de la littérature. Puis, les résultats de la corrélation d'images obtenues pour la poutre E-E expérimentale sont présentés. Une étude est ensuite effectuée afin de mettre en évidence l'influence de certains paramètres de la méthode de corrélation comme la taille du domaine de corrélation et le nombre de points à corréler, en évaluant le bruit d'image. En effet, différents types d'erreurs peuvent être rencontrés lors de mesures par corrélation d'images. Finalement, l'identification des paramètres modaux associés au signal de déplacement obtenu ainsi qu'une confrontation numérique-expérience sont présentées.

---

## Plan du Chapitre 8

---

<b>8.1</b>	<b>Principe général de la corrélation d'images . . . . .</b>	<b>193</b>
<b>8.2</b>	<b>Contexte bibliographique . . . . .</b>	<b>195</b>
<b>8.3</b>	<b>Le traitement numérique des images . . . . .</b>	<b>199</b>
8.3.1	Les pixels d'une image . . . . .	199
8.3.2	Mesure de détérioration entre deux images . . . . .	199
8.3.3	Filtrage d'images . . . . .	199
8.3.4	Coefficient de corrélation de signaux . . . . .	200
8.3.5	Interpolation . . . . .	200
<b>8.4</b>	<b>Mise en œuvre expérimentale . . . . .</b>	<b>201</b>
8.4.1	Matériel à disposition . . . . .	202
8.4.2	Qualité du mouchetis . . . . .	203
8.4.3	Qualité de l'image . . . . .	205
8.4.4	Bruit d'images . . . . .	205
<b>8.5</b>	<b>Mesure de déplacement obtenue à l'aide de la caméra rapide . . . . .</b>	<b>206</b>
<b>8.6</b>	<b>Influence des paramètres . . . . .</b>	<b>207</b>
8.6.1	Influence du choix du nombre de points . . . . .	208
8.6.2	Influence de la région d'étude . . . . .	208
<b>8.7</b>	<b>Analyse modale et détection de défaut par corrélation d'images . . . . .</b>	<b>209</b>
<b>8.8</b>	<b>Confrontation Numérique-Expérience . . . . .</b>	<b>211</b>
<b>8.9</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>215</b>
	<b>Bibliographie . . . . .</b>	<b>215</b>

---

## 8.1 Principe général de la corrélation d'images

L'extensométrie par mesures de champs basée sur la corrélation d'images numériques est une technique de mesure optique sans contact. La connaissance des déplacements ou déformations au cours du temps est un allié essentiel au modélisateur pour permettre une meilleure validation des modèles numériques.

En pratique, deux images sont utilisées. La première est dite de référence ou non-déformée et la seconde déformée. L'idée de la corrélation d'images consiste à comparer les images acquises à l'état de référence et celles acquises à différentes étapes de la déformation au cours de la sollicitation (voir figure ci-dessous), puis à mesurer le champ incrémental de déplacement (M. Bornert <sup>1</sup> [1]). Ces images sont constituées d'un ensemble de pixels avec des niveaux de gris. Pour ce faire, une grille virtuelle de points est créée dans l'image de référence et la technique consiste à rechercher les points correspondants dans l'image déformée en s'appuyant sur la reconnaissance des niveaux de gris d'une zone entourant chaque point. La région située au même endroit est considérée dans l'image déformée (Fig. 8.1).

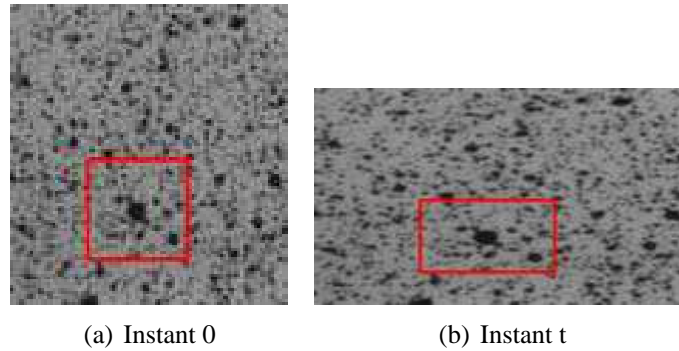


FIGURE 8.1 – Zones d'étude sur une image de référence et sur une image déformée [2]

D'un point de vue mathématique, nous supposons que les images dans deux états différents de l'objet s'écrivent  $f(X)$  et  $g(X)$ , où  $X$  représente les coordonnées en pixel dans l'image. Si on appelle  $u(X)$  le champ de déplacement entre les deux images, la conservation locale de la luminance s'écrit :

$$g(X) = f(x + u(X)) \quad (8.1)$$

Le problème consiste donc à identifier le meilleur champ de déplacement permettant de minimiser la fonctionnelle des résidus de corrélation,  $\phi_{cor}^2$ .

$$\phi_{cor}^2[u] = \int \int_{\Omega} |f(X + u(X)) - g(X)|^2 dS = \int \int_{\Omega} \Phi(X) dS \quad (8.2)$$

La minimisation de  $\Phi$  est intrinsèquement non-linéaire et constitue un problème mal posé. Pour ces raisons, une formulation faible est préférée en adoptant un schéma de discrétisation général.

1. Responsable de l'équipe Multi-échelles du Laboratoire Navier.

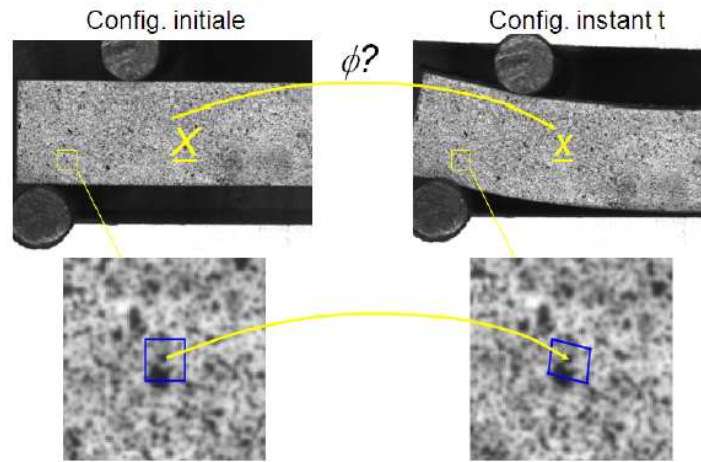


$$u(X) = \sum_{n \in N} u_n \psi_n(X) = [\psi(X)][u] \quad (8.3)$$

où  $\psi_n$  sont les fonctions de forme et  $u_n$  leurs degrés de liberté associés. Dans un formalisme matrice-vecteur,  $[\psi]$  est une matrice ligne qui contient les valeurs des fonctions de forme  $\psi_n$  et  $u$  le vecteur colonne des degrés de liberté.

La technique vise donc à approximer au mieux la transformation apparente  $\Phi(X)$  d'une fenêtre de corrélation  $D$  au voisinage de  $X$  en mesurant la ressemblance entre la fenêtre  $D$  et sa transformée par  $\Phi$  (voir figure 8.2).

La ressemblance est définie par un coefficient de corrélation  $C(\Phi_0)$ ,  $\Phi_0$  étant une approximation de la transformation locale réelle  $\Phi$  recherchée. Cette ressemblance est d'autant plus grande que le coefficient de corrélation est petit. On retient la transformation  $\Phi_0$  qui minimise  $C(\Phi_0)$ .



**FIGURE 8.2 – Principe de la corrélation d'images : le marquage (« mouchetis » de peinture) suit le mouvement matériel**

Dans CMV, logiciel de corrélation d'images développé par M. Bornert, le coefficient de corrélation à minimiser est défini comme suit [3].

$$C(\Phi_0) = 1 - \frac{\sum_{X \in D} (f(X) - \bar{f}) \cdot (g(\phi(X)) - \bar{g})}{\sqrt{\sum_{X \in D} (f(X) - \bar{f})^2 \cdot \sum_{X \in D} (g(\phi(X)) - \bar{g})^2}} \quad (8.4)$$

où  $\bar{f}$  et  $\bar{g}$  forment la moyenne des images  $f$  et  $g$  respectivement.

Ce coefficient correspond aux écarts de distribution de niveaux de gris présents dans la fenêtre de corrélation  $D$  entre l'état initial et l'état déformé.

Ce coefficient de corrélation est compris entre 0 et 2. Une ressemblance parfaite entre les deux images

conduit à un coefficient nul. Sa valeur maximale est de 2 ("anti-corrélation") et la valeur 1 reflète une absence de ressemblance des niveaux de gris. Les valeurs de ce coefficient de corrélation sont insensibles à des variations moyennes de contraste et de luminosité sur la fenêtre de corrélation. Le résultat de la recherche de l'approximation de la transformation réelle par minimisation du coefficient de corrélation dépend aussi de l'espace dans lequel cette minimisation est entreprise, c'est-à-dire de la forme paramétrique a priori de  $\Phi_0$ . Un développement limité de  $\Phi$  au voisinage de  $x$  fournit diverses représentations approchées envisageables.

## 8.2 Contexte bibliographique

Lombard et Gatuingt [4] dans le cadre des travaux de thèse de Chambart [5] et Leroux [6] ont réalisé, en collaboration avec le CEA Saclay et EDF R&D, des essais d'impact sur des poutres en béton armé. Ces essais ont été instrumentés avec deux caméras rapides en plus des mesures habituelles de déformation, de vitesse du projectile et de force d'impact (Fig. 8.3).

L'objet de leur travail était l'analyse par corrélation d'images de ces essais. Leur but était de pouvoir

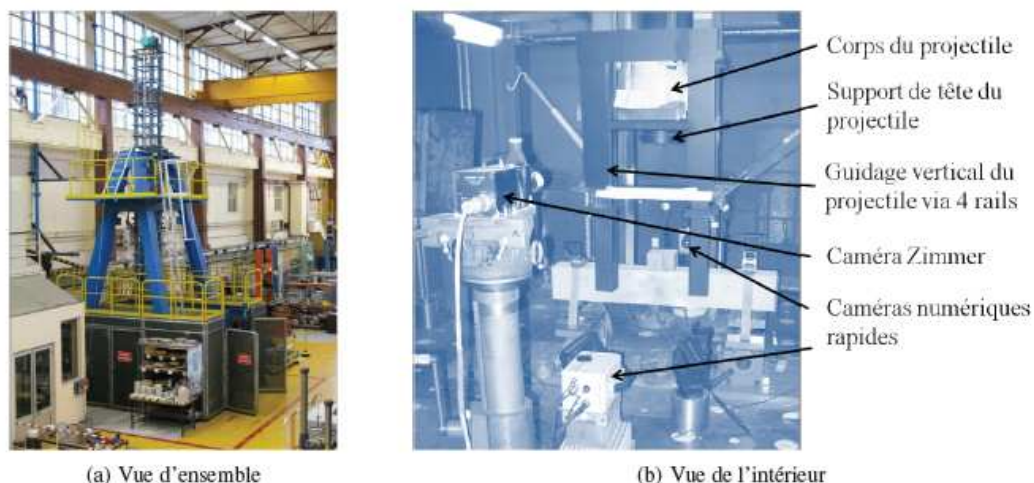


FIGURE 8.3 – Dispositif expérimental [4]

développer des techniques expérimentales capables d'identifier les champs de déplacement, permettant ainsi de valider un modèle (loi de comportement et modèle numérique) en le comparant plus précisément avec l'expérience.

Les caméras utilisées possèdent une fréquence d'acquisition maximale de  $10^6$  images par seconde. Cependant, leur capacité de stockage est limitée et dépend de la durée de l'enregistrement, de la fréquence d'acquisition et aussi de la résolution des images.

La figure 8.4 montre une zone restreinte d'une face de la poutre testée avec mouchetis afin d'observer la propagation de la fissure centrale de la poutre.

La figure 8.5 montre les différents champs de déplacement (horizontaux et verticaux) obtenus pour la poutre en béton armé soumise à un choc.

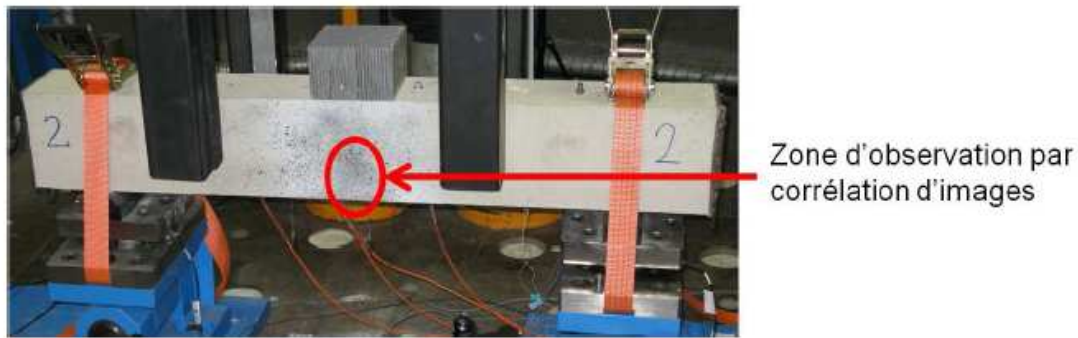


FIGURE 8.4 – Zone d'intérêt pour la corrélation d'images lors de l'étude de la vitesse de fissuration sur une poutre en flexion trois points [4]

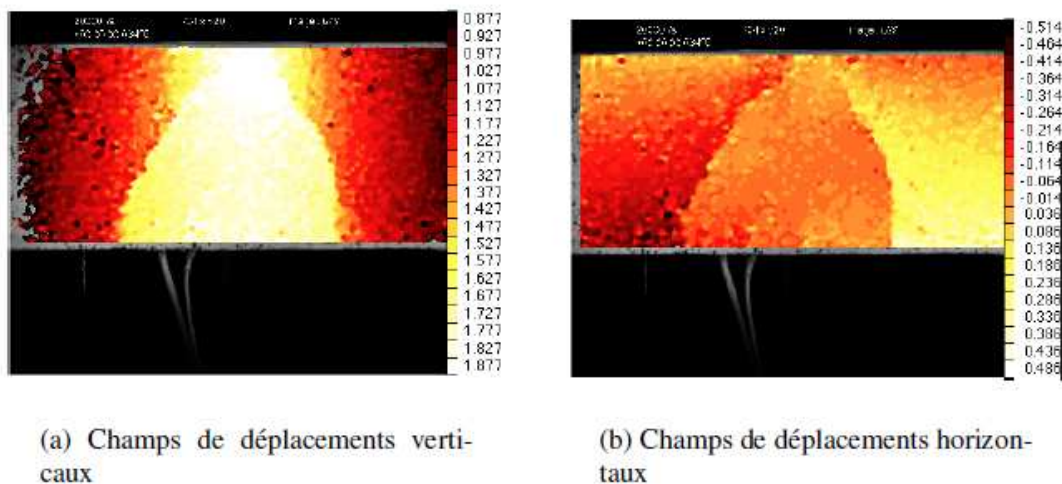
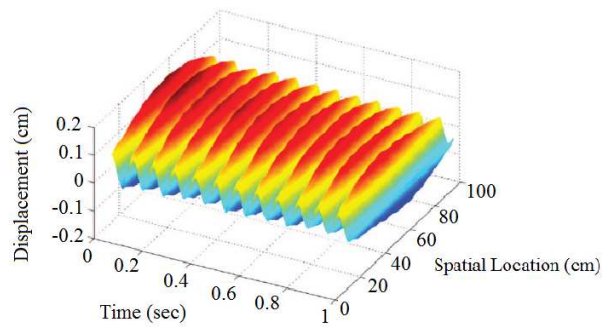


FIGURE 8.5 – Champs de déplacements (en pixel) dans la poutre lors de l'essai de choc [4]

Des essais de laboratoire ont également été menés par [8] pour mettre en œuvre les concepts d'utilisation des caméras à haute vitesse. Les résultats ont montré que l'acquisition des données par corrélation d'images utilisant une caméra est efficace pour obtenir des données spatio-temporelles et réaliser des essais dynamiques sans contact.

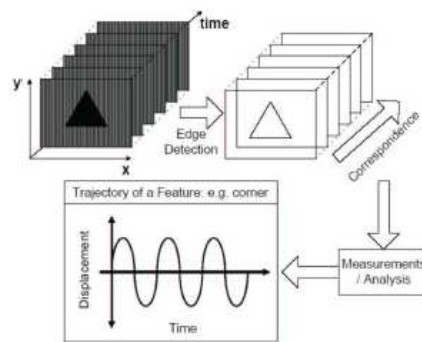
Ils ont eu recours à cette technique pour détecter des endommagements dans les structures et ceci par extraction du déplacement temporel. Puis, ils ont identifié les caractéristiques dynamiques de la structure à savoir les fréquences naturelles, l'amortissement et les modes propres. Une poutre en acier simplement supportée est utilisée pour les deux états : sain et endommagé. Les images ont été enregistrées à l'aide d'une caméra Nac Memrecam fxK3. Le capteur CMOS a une résolution de  $1280 \times 1024$  pixels et un convertisseur analogique/numérique de 10 bits. Les endommagements sont des entailles de différentes profondeurs.

La figure 8.6 montre un exemple typique de vibration libre de la poutre intacte. Il y a 1001 points de données (c-à-d images) dans le domaine temporel et 1131 points sur la longueur de la poutre. Les données ont ensuite été traitées à l'aide du logiciel MScope Ves [9] afin d'obtenir les fréquences propres, les coefficients d'amortissement et les modes propres.



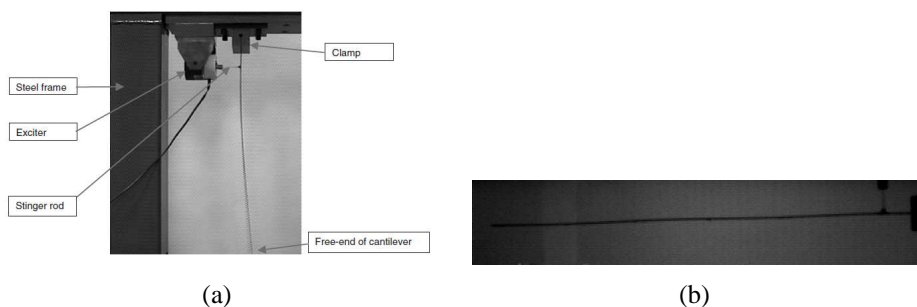
**FIGURE 8.6 – Déplacement temporel de la poutre intacte [8]**

Patsias et al. [8] ont également proposé une application pour la détection des défauts d'une poutre. Ils ont utilisé la méthode des correspondances à partir des images de contour pour reconstruire le mouvement.



**FIGURE 8.7 – Méthode générale d'obtention de la déformée moale à partir d'une séquence d'images [8]**

Ils ont réalisé l'analyse modale expérimentale d'une poutre console en acier. L'excitation est générée par un pot vibrant. Ils ont trouvé une très bonne corrélation entre les fréquences théoriques et celles estimées par la méthode optique. De plus, les déformées analytique et expérimentale sont très proches. D'ailleurs, une des applications de la méthode de Patsias est d'étudier le déplacement d'une zone. Le déplacement obtenu à partir des images a permis d'identifier sur le spectre de puissance obtenu par la TF, les fréquences de résonance de la structure (Fig. 8.8).



**FIGURE 8.8 – (a) Photo de la poutre E-L en flexion, (b) Image typique prise par la caméra SONY [8]**

Morlier et al. [10] ont utilisé le traitement d'images sur des données réelles afin d'évaluer la présence d'endommagement. Ils ont mesuré les vibrations d'un pont à l'aide d'une caméra à faible résolution.

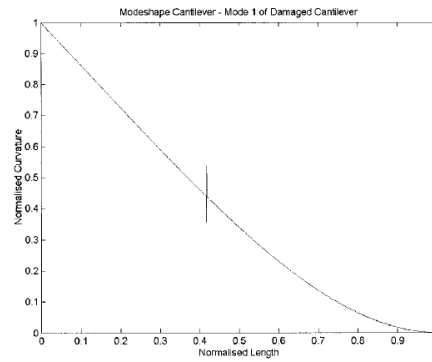


FIGURE 8.9 – Première courbure modale de la poutre endommagée [8]



FIGURE 8.10 – Exemple d'estimation du mouvement. Les 10 points à corrélérer sont en vert et la zone à étudier est celle qui est dans le cadre orange

Ils ont suivi le mouvement des pixels (Fig. 8.11).



FIGURE 8.11 – Exemple d'estimation du mouvement. Les 10 points à corrélérer sont en vert et la zone à étudier est celle qui est dans le cadre orange

D'autre part, Karama [11] a mesuré les champs de déplacements et de déformations sur la surface latérale d'une poutre sandwich en nid d'abeilles soumise à des sollicitations de flexion trois et quatre points pour la validation d'une modélisation par éléments finis.

Les études de Lecompte [12] et Robert [13] présentent également une application de la stéréocorrélation d'images pour la détection de fissures à la surface d'une poutre.

Poudel et al. [14] ont utilisé une caméra dans leur étude afin d'identifier les paramètres modaux d'une poutre endommagée. Ils ont appliqué la méthode fondée sur la TO sur la matrice des modes propres

pour détecter et localiser une entaille. Les résultats sont assez satisfaisants.

## 8.3 Le traitement numérique des images

### 8.3.1 Les pixels d'une image

Une image numérique en niveaux de gris est un tableau de valeurs. Chaque case de ce tableau, qui stocke une valeur, se nomme un pixel. En notant  $n$  le nombre de lignes et  $p$  le nombre de colonnes de l'image, on manipule ainsi un tableau de  $n \times p$  pixels.

Les valeurs des pixels sont enregistrées dans l'ordinateur ou l'appareil photo numérique sous forme de nombres entiers entre 0 et 255, ce qui fait 256 valeurs possibles pour chaque pixel. La valeur 0 correspond au noir, et la valeur 255 correspond au blanc. Les valeurs intermédiaires correspondent à des niveaux de gris allant du noir au blanc.

### 8.3.2 Mesure de détérioration entre deux images

Les images sont parfois de mauvaise qualité. Un exemple typique de défaut est le bruit qui apparaît quand une photo est sous-exposée, c'est-à-dire qu'il n'y a pas assez de luminosité. Ce bruit se manifeste par de petites fluctuations aléatoires des niveaux de gris.

En traitement d'image, quand on parle de bruit, il est généralement lié aux dispositifs d'acquisition et de numérisation de l'image.

La mesure de la dégradation de l'image se fait par comparaison (distance de Hamming) entre l'image d'origine et la nouvelle image. Soient  $f$  et  $\tilde{f}$ , l'image originale et l'image bruitée respectivement.

Le rapport signal sur bruit (ou Signal to Noise Ratio) exprimé par Chanussot [15] équivaut en dB à :

$$SNR = 10 \cdot \log \left[ \frac{\frac{1}{M \cdot N} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N f^2(m, n)}{\frac{1}{M \cdot N} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \left( f(m, n) - \tilde{f}(m, n) \right)^2} \right] \quad (8.5)$$

Ainsi, plus le  $SNR$  est petit, plus l'image est bruitée, ce qui peut être gênant lors des traitements d'images. Lorsque le  $SNR$  tend vers l'infini, l'image est considérée comme "parfaite". Elle ne contient donc aucun bruit.

Les normes Grand Public considèrent qu'une image est assez bonne si le  $SNR$  est supérieur à 30 dB. En deçà, l'image est trop dégradée.

### 8.3.3 Filtrage d'images

La notion de filtre est empruntée à la physique et aux techniques de traitement du signal. Si un signal (électrique, radio, image, etc.) présente des composantes de fréquences très différentes, il peut



être avantageux d'en éliminer certaines ; on parle de filtrage. Par exemple, un filtre passe-bas enlève toutes les composantes du spectre de valeurs supérieures à une valeur de fréquence donnée. Filtrer une image c'est lui appliquer une transformation mathématique qui modifie les valeurs de gris de tout ou partie des pixels.

L'application du filtre à l'image consiste à déplacer la fenêtre et à remplacer la valeur de chaque pixel par le résultat de l'opération portant sur ses voisins. Une nouvelle image est ainsi générée (un facteur de normalisation permet de conserver un intervalle de valeurs identique en entrée et en sortie).

### 8.3.4 Coefficient de corrélation de signaux

Bornert et al. dans [7] ont proposé un coefficient de corrélation  $C_d$  qui mesure la ressemblance de deux signaux de déplacement, le signal calculé numériquement et celui obtenu par corrélation d'images. Il est défini par :

$$C_d = \left| \frac{\sum_{i=1}^N (y_i^c - \bar{y}^c)(y_i^m - \bar{y}^m)}{\sum_{i=1}^N (y_i^c - \bar{y}^c)^2 \sum_{i=1}^N (y_i^m - \bar{y}^m)^2} \right| \quad (8.6)$$

où  $y^m$  représente le signal de déplacement de dimension  $N$  calculé numériquement en un point  $m$ , et  $y^c$  est le signal mesuré par corrélation d'images. Si les signaux sont bien corrélés, le coefficient  $C_d$  sera proche de 1.

### 8.3.5 Interpolation

Le traitement des images se déroule en deux étapes. La première est une recherche, au pixel près, des positions des points de référence dans l'image déformée. Dans cette étape, la démarche est incrémentale et consiste à rechercher le minimum du coefficient de corrélation  $C$  dans un domaine de recherche centré sur une position a priori déduite par translation à partir du point précédent. La deuxième étape consiste à optimiser la position des points en obtenant une précision « sub-pixel » fournissant les composantes du déplacement avec une précision d'une fraction de pixel. Les coordonnées des centres des domaines homologues déterminent le champ de déplacement qui est utilisé pour calculer le champ de déformation.

Dans le logiciel CMV, la transformation de la fenêtre de corrélation est supposée être une translation pure caractérisée par les deux composantes du vecteur de translation ou bien une transformation homogène caractérisée par 6 coefficients (les 2 composantes de translation et les 4 composantes du gradient de la transformation). La minimisation de  $C$  est un problème d'optimisation. La procédure, la plus coûteuse en puissance de calcul mais souvent la plus précise, notamment lorsque les gradients de niveaux de gris des images sont forts, consiste à interpoler les niveaux de gris de l'image déformée. Dans CMV, quatre choix d'interpolation sont possibles (figure 8.12) :

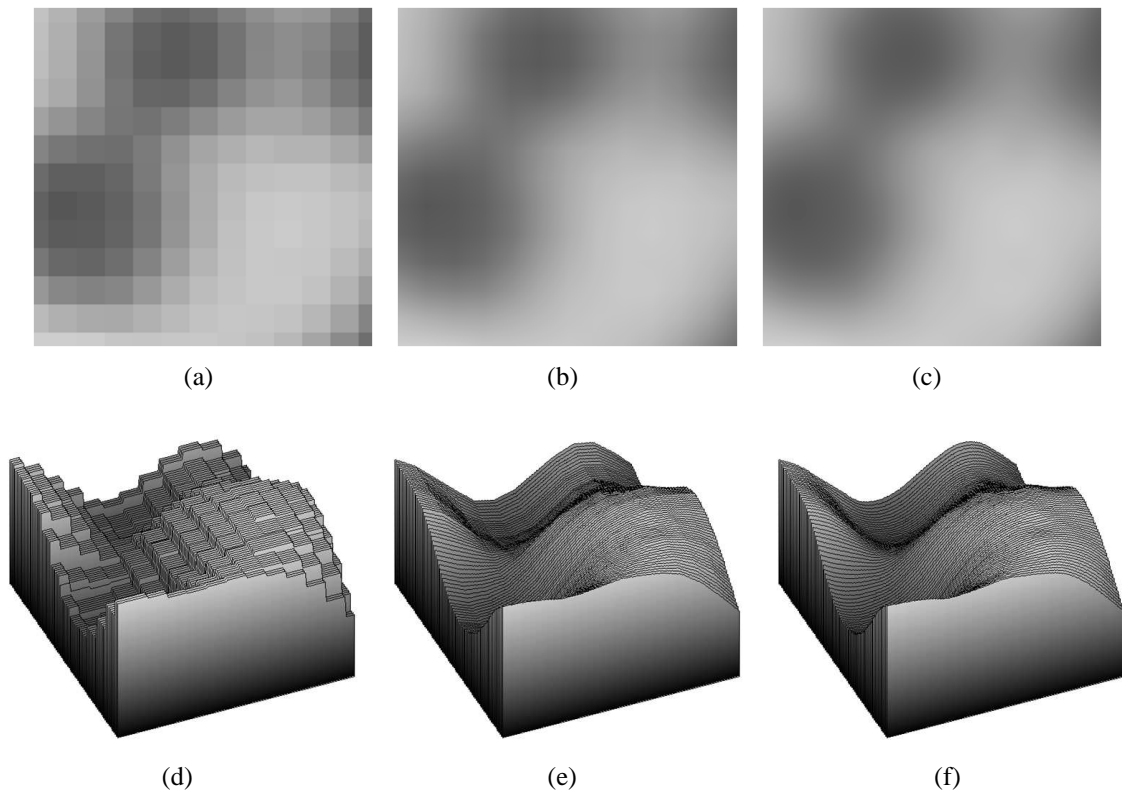


FIGURE 8.12 – Types d'interpolation : (a) et (d) Plus proche (b) et (e) bilinéaire (c) et (f) bicubique

- Bilineaire (distribution continue du niveau de gris dont la valeur au point  $x$  dépend du niveau de gris discret des 4 pixels voisins, au travers de 4 coefficients d'interpolation à déterminer).
- Bicubique (distribution continue et continuellement différentiable du niveau de gris dont la valeur au point  $x$  dépend du niveau de gris discret des 16 pixels voisins, au travers de 16 coefficients). Cette interpolation assure la continuité
  - du niveau de gris
  - de son gradient selon  $x$
  - de son gradient selon  $y$
  - de son gradient selon  $x$  et  $y$
- Spline bicubique : formulation alternative à la précédente ayant les mêmes propriétés.
- Spline biquintique : l'interpolation dépend des 36 pixels voisins d'une position  $x$ .

## 8.4 Mise en œuvre expérimentale

Dans cette partie, on procède à l'analyse vibratoire de la poutre E-E étudiée dans le chapitre 7 par corrélation d'images. Les mesures de champs de déplacement par corrélation d'images ont été entreprises à l'aide du logiciel CMV. Une interpolation linéaire est appliquée sur chaque domaine de l'image déformée ce qui permettra de déterminer les déplacements à une fraction de pixel près.

Le logiciel permet de visualiser les images de référence et déformée. Les points de référence (ou la



grille virtuelle) sont créés à partir de quatre points choisis dans l'image de référence et définissant un parallélogramme (Fig. 8.13) puis 20 points équidistants sont considérés, dont les abscisses sont répertoriées dans le tableau 8.1.



FIGURE 8.13 – Grille virtuelle pour la poutre E-E

Point	Abscisse	
	pixel	mm
<i>n</i> ° 1	68.00	154.49
<i>n</i> ° 2	167.00	175.60
<i>n</i> ° 3	267.00	196.91
<i>n</i> ° 4	367.00	218.23
<i>n</i> ° 5	467.00	239.54
<i>n</i> ° 6	567.00	260.86
<i>n</i> ° 7	667.00	282.18
<i>n</i> ° 8	766.00	303.28
<i>n</i> ° 9	866.00	324.59
<i>n</i> ° 10	966.00	345.91
<i>n</i> ° 11	1066.00	367.23
<i>n</i> ° 12	1166.00	388.54
<i>n</i> ° 13	1266.00	409.86
<i>n</i> ° 14	1365.00	430.96
<i>n</i> ° 15	1465.00	452.28
<i>n</i> ° 16	1565.00	473.59
<i>n</i> ° 17	1665.00	494.91
<i>n</i> ° 18	1765.00	516.22
<i>n</i> ° 19	1865.00	537.54
<i>n</i> ° 20	1965.00	558.86

TABLEAU 8.1 – Abscisse des points de la grille en (pixel) et en (mm) par rapport à l'encastrement gauche de la poutre E-E

Les images sont discrétisées en zones d'étude, centrées au point considéré, dont la taille en pixels est déterminée par l'utilisateur.

Les paramètres réglables au niveau du logiciel sont :

- la taille de la fenêtre de corrélation
- le pas de la grille de points appariés, de taille  $p$
- option de calcul : image  $n$  comparée à l'image  $n_0$

Le pas  $p$  est choisi par compromis afin d'obtenir un champ de déplacement suffisamment lisse dans un temps de calcul raisonnable.

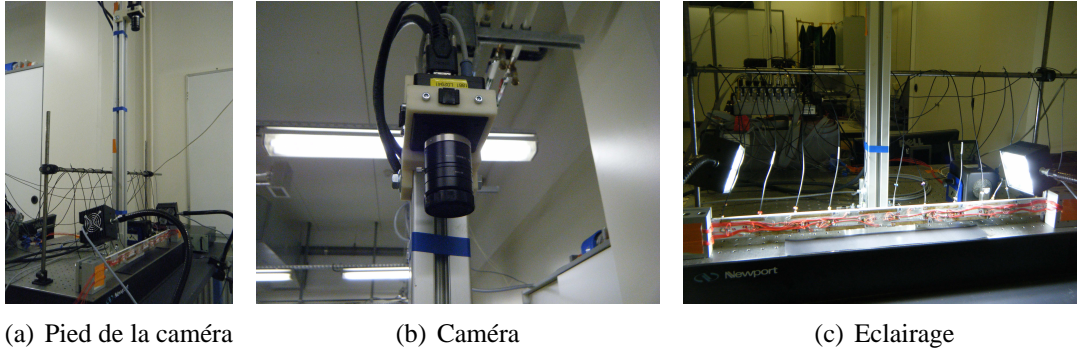
### 8.4.1 Matériel à disposition

Le matériel utilisé est composé de :

- peintures noire et blanche (mouchetis) ;
- bloc métallique ;
- caméra haute résolution ;

- objectifs ;
- pied photographique ;
- moyens d'éclairage ;
- PC d'acquisition et de traitement des images.

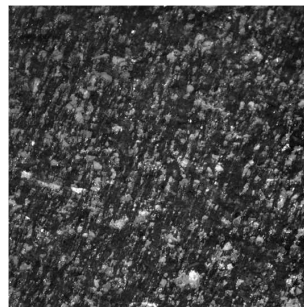
La figure 8.14 illustre le montage expérimental.



**FIGURE 8.14 – Poutre instrumentée par la caméra rapide**

### 8.4.2 Qualité du mouchetis

La corrélation d'images nécessite la présence de contrastes locaux appelés mouchetis qui sont ajoutés artificiellement lorsque le matériau n'en présente pas naturellement, comme une roche argileuse par exemple (Fig. 8.15). Notons que le contraste local autour de chaque point doit être d'une échelle plus fine que celle des gradients de déformations.



**FIGURE 8.15 – Roche argileuse**

Pour obtenir des résultats satisfaisants, une bonne qualité d'image est importante et le spectre de niveau de gris doit être le plus large et le plus équilibré possible [13]. La réalisation d'un mouchetis de peinture constitué d'un mélange de tâches de peinture noires et blanches aléatoirement réparties, permet d'élargir le spectre.

En pratique, deux cas se présentent donc :

- la texture naturelle ;
- la création d'une texture aléatoire (mouchetis de peinture).

Un mouchetis aléatoire avec une peinture noire et blanche a été appliquée. La figure 8.16(b), qui est une copie d'écran de CMV, montre la poutre après dépôt du mouchetis. Le contraste est relativement important. Le mouchetis idéal doit avoir un fort contraste afin d'élargir le spectre le plus possible. Il faut également conserver une homogénéité d'ensemble car les paramètres de calcul sont définis pour l'ensemble de l'image. La qualité du mouchetis est un facteur d'incertitude de mesure important.



FIGURE 8.16 – Poutre avec mouchetis

L'histogramme de niveaux de gris permet d'estimer a priori la qualité de l'image. L'axe des abscisses correspond au niveau de gris, 0 correspond au noir et le blanc valant  $2^{n_{\text{bits}}}$ , soit 256 pour une image de 8 bits. La valeur en ordonnée représente le nombre de pixels ayant cette intensité de niveau de gris. Un bon histogramme présentera donc un spectre large (du noir au blanc) et sera assez plat ce qui préservera l'ordre des contrastes dans l'image. L'histogramme de la figure 8.17 présente la répartition des niveaux de gris de l'image de référence. Celui ci présente un spectre assez large et plat, ce qui doit permettre d'obtenir des résultats satisfaisants pour la corrélation d'images.

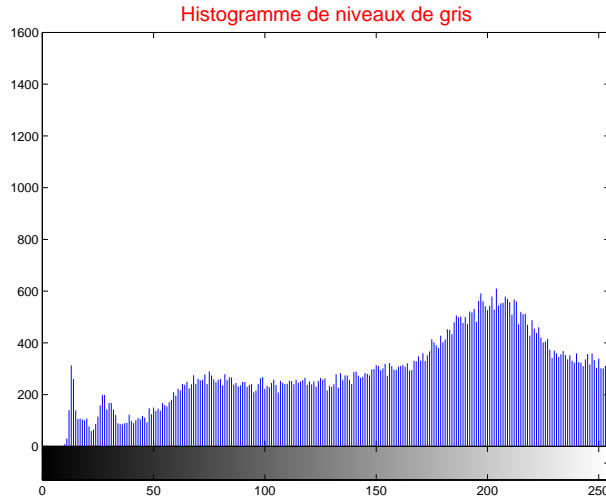


FIGURE 8.17 – Histogramme de niveaux de gris pour l'image de référence

L'écart-type des niveau de gris d'une image  $I$  de taille  $n \times m$  (par rapport au niveau de gris moyen  $\bar{I}$ ) est calculé par :

$$\sigma_I = \sqrt{\frac{1}{n \times m} \sum_{i,j} (I(i,j) - \bar{I})^2} \quad (8.7)$$

avec  $\bar{I} = \frac{1}{n \times m} \sum_{i,j} I(i,j)$

Dans le cas de l'image de référence choisie (Fig. 8.17),  $\sigma_I$  vaut 11.56%.

### 8.4.3 Qualité de l'image

Pour maximiser la qualité de l'image, il faut bien adapter l'éclairage et régler correctement les paramètres de la caméra. Le temps d'exposition, le contraste, la luminosité, la netteté etc. Le temps d'exposition doit être correctement choisi, ni trop court et trop long. La luminosité est réglée manuellement de manière à visualiser tous les niveaux de gris. A noter que pour éviter les courbes en cloches dans l'histogramme de niveaux de gris, qui dénotent un contraste assez faible, l'éclairage joue un rôle important.

### 8.4.4 Bruit d'images

Les images sont souvent entachées de bruit, parfois non visible à l'œil nu, qui peuvent perturber les traitements. Tous les algorithmes d'évaluation du bruit d'images reposent sur la connaissance du type de bruit à analyser. Il provient de différentes causes [16] :

- Bruit intrinsèque au capteur de l'image : circuits électroniques du système, numériseur, lentille entraînent bruits de fond, distorsions etc.
- Bruit externe : poussières sur l'objectif, mouvement du support d'un élément « capté », perturbations atmosphériques (température).
- Bruit de traitement numérique des images : échantillonnage.

Dans notre cas, la mesure de dégradation des images a été faite par comparaison entre l'image d'origine, qui correspond à la première image prise à l'instant du choc, et les images dites déformées qui correspondent à la poutre en mouvement. Cette comparaison est faite en calculant le SNR défini dans la section 8.3.2.

$$SNR = 10.log \left[ \frac{\frac{1}{M.N} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N f^2(m, n)}{\frac{1}{M.N} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \left( f(m, n) - \tilde{f}(m, n) \right)^2} \right] \quad (8.8)$$

La figure 8.18 montre le rapport signal/bruit des images. L'axe des abscisses correspond au numéro de l'image par ordre chronologique et l'axe des ordonnées au SNR en dB. La majorité des valeurs sont supérieures à 30 dB. Cependant, on remarque que, pour quelques images, le SNR tend vers 0 ce qui signifie qu'il y a des images bruitées et par conséquent, une perturbation dans les résultats peut-être présente.

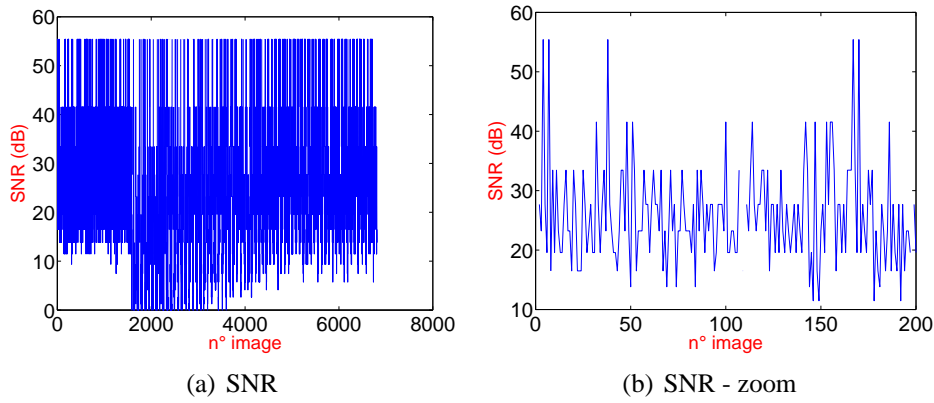


FIGURE 8.18 – SNR mesuré à partir d'une suite d'images enregistrées

## 8.5 Mesure de déplacement obtenue à l'aide de la caméra rapide

Notre but avec l'utilisation de cette technique est de remonter au signal temporel du déplacement de la poutre en vibration libre.

La résolution de l'image est réglée au niveau du logiciel d'acquisition d'images de manière à obtenir le maximum d'images par seconde sans perdre l'information voulue. Pour cela, une résolution de  $2032 \times 40$  pixels a été choisie ce qui permettra d'avoir 5844 images par seconde soit une image toutes les  $0,171\text{ms}$ . Cette fréquence d'acquisition d'images permettra d'observer les trois premières fréquences propres de la poutre. La durée d'acquisition pour chaque essai est  $T = 2\text{s}$ . Le temps d'exposition est pris égal à  $20\text{ }\mu\text{s}$ . La taille d'image en pixels correspond à une zone d'observation sur la poutre d'environ  $400 \times 57\text{ mm}$ , soit une résolution approximative de 5 pixels par  $\text{mm}$ .

La corrélation d'images fournit les déplacements en chaque point mais la position optimale du motif ne correspond jamais aux déplacements en pixels entiers, une interpolation linéaire a donc été utilisée pour calculer la valeur des pixels. La figure 8.19 présente l'image de référence et une image déformée, on voit bien qu'une bonne corrélation se trouve.

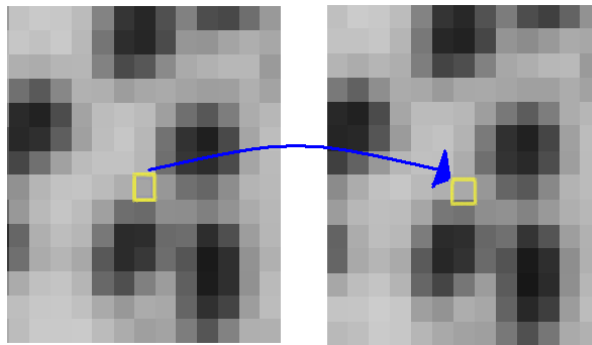


FIGURE 8.19 – Images avant et après déformation dans la zone d'intérêt

A partir des positions aux pixels près, la recherche du minimum de  $C$  est effectuée par une méthode de descente de gradient utilisant le premier gradient du coefficient de corrélation.

La figure 8.20 est une copie du logiciel montrant les coefficients de corrélation obtenus entre deux

images corrélées. Les valeurs sur la barre de couleurs se trouvent entre 0.064% et 0.188% qui sont des valeurs faibles, donc une bonne corrélation est obtenue entre les deux images.

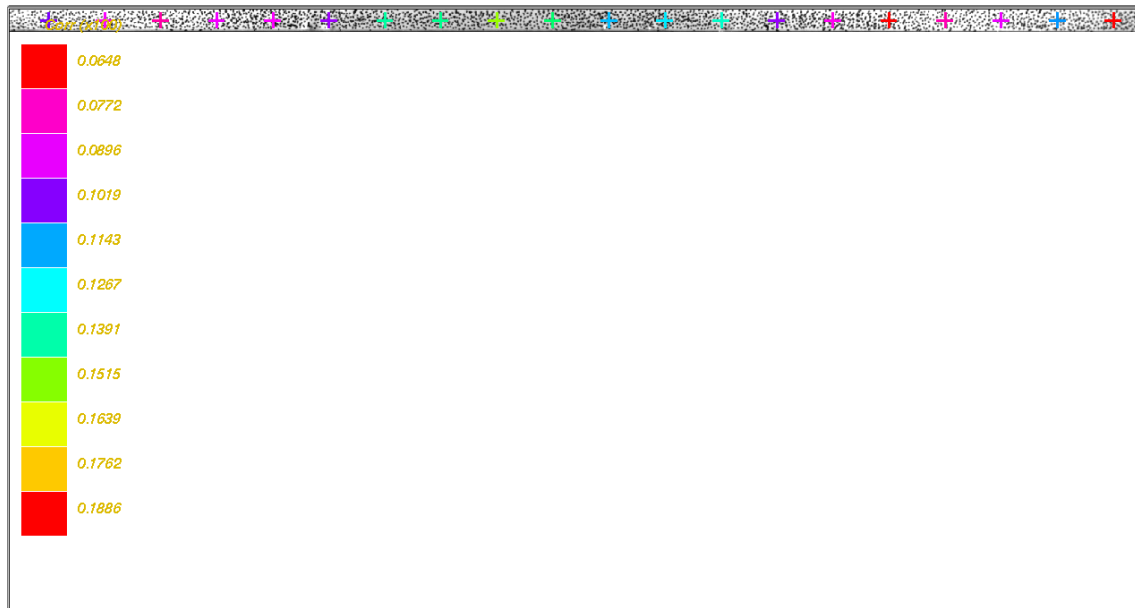


FIGURE 8.20 – Coefficients de corrélation

Avant de débiter l'identification modale, un accéléromètre a été instrumenté au sommet de la caméra pour mesurer le déplacement de celle-ci dû à l'excitation. Un déplacement maximal de  $0.56\mu m$  a été obtenu, par double intégration du signal d'accélération, ce qui peut affecter le résultat.

La figure 8.21 présente le signal temporel et la TF obtenus avec la caméra pour la poutre E-E. Un déplacement maximal de  $150\mu m$  est observé. Nous remarquons sur la TF un pic étrange au niveau de la 3<sup>ème</sup> fréquence propre, mais aucune explication n'a pu être trouvée.

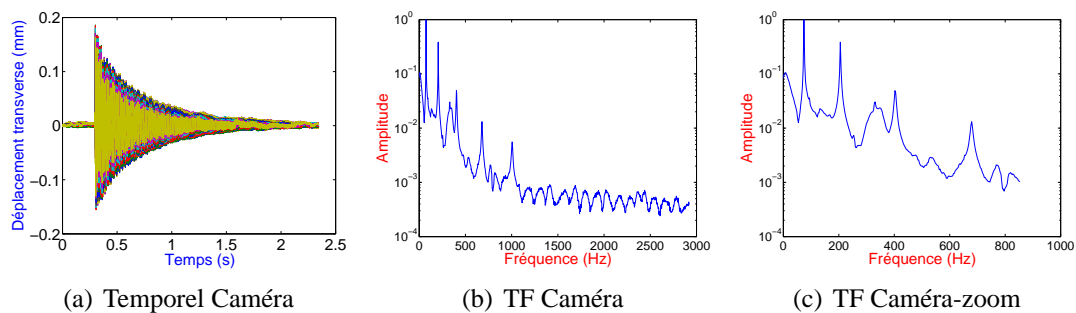


FIGURE 8.21 – Signal temporel du déplacement transverse et TF correspondante obtenus pour la poutre E-E à partir de la caméra

## 8.6 Influence des paramètres

La corrélation d'images dépend de différents paramètres. Dans CMV, plusieurs paramètres sont réglables mais les paramètres essentiels à choisir sont la grille de points et le domaine de corrélation ou

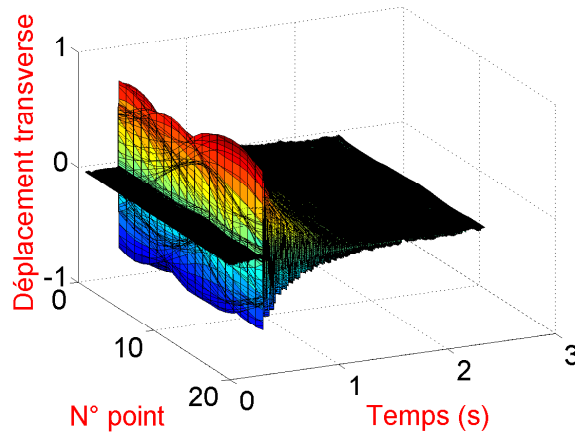


FIGURE 8.22 – Série de déplacement temporel pour la poutre E-E

région d'étude (RE) autour de chaque point.

Les corrélations d'images sont, en général, gourmandes en temps de calcul. Dans cette partie, puisque plusieurs corrélations d'images seront menées afin d'étudier l'influence des paramètres, seulement 8000 images ont été traitées. La longueur du signal est  $T = 1.18s$ . Donc pour les mesures, 8000 points de résolution sont pris. Le pas de calcul de la TF est alors égal à  $0.713Hz$ .

### 8.6.1 Influence du choix du nombre de points

Les signaux sont traités par la TO pour identifier les paramètres modaux. La figure 8.23 trace les déformées modales expérimentales obtenues. Les points montrent que le nombre de points dans corrélation est très sensible dans le cas du mode n°1.

Le nombre de points dans la grille sur l'image de la poutre est initialement introduit dans CMV. Dans cette partie, nous allons étudier son influence sur les modes propres obtenus. Tout d'abord 10 ont été pris, puis 20, 50 et finalement 100 points. Le domaine de corrélation autour de chaque point est fixe pour tous les cas et est égal à  $100 \times 30$  pixels.

### 8.6.2 Influence de la région d'étude

Puisque la corrélation d'images consiste à comparer le motif correspondant à la zone d'étude dans deux images, l'augmentation de la taille de la zone d'étude permet de diminuer le niveau d'incertitude du déplacement mesuré au détriment du nombre de points de mesures. Pour cela, l'étude de l'influence de la taille du domaine de corrélation a été réalisée. La figure 8.24 montre le résultat de la corrélation pour différentes tailles de fenêtre (en pixels) :  $30 \times 30$ ,  $20 \times 100$ ,  $30 \times 100$ ,  $30 \times 120$ . Pour le premier mode, une perturbation se trouve toujours pour des points situés entre les abscisses  $345.91mm$  et  $367.23mm$ . Aucune conclusion significative n'a pu être tirée.

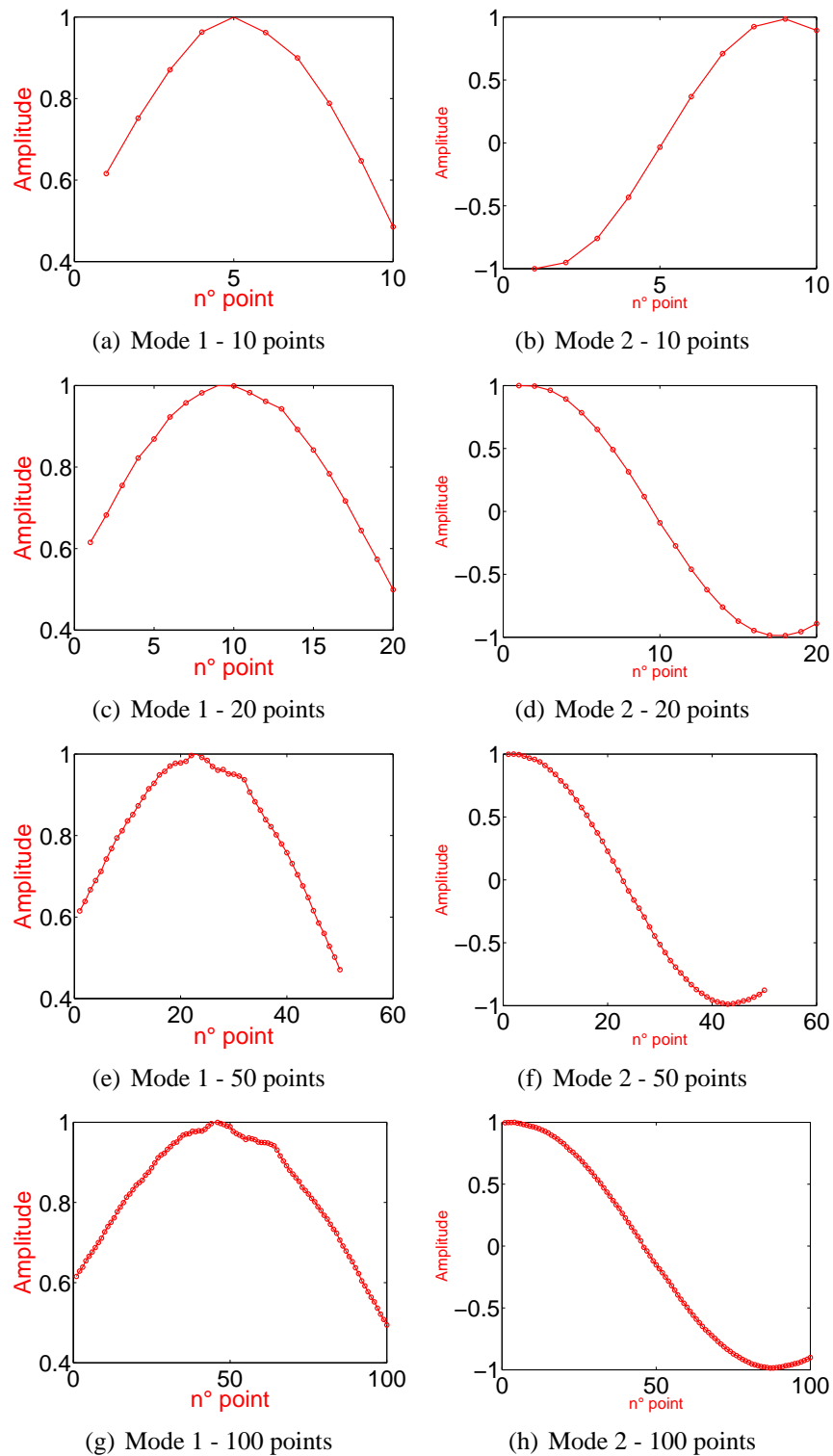


FIGURE 8.23 – Deux premiers modes propres obtenus à partir de la caméra pour différent nombre de points

## 8.7 Analyse modale et détection de défaut par corrélation d'images

Comme la corrélation d'images est coûteuse en temps de calcul, les résultats ci-après proviennent de la moyenne de 8 essais réalisés sur la poutre intacte et endommagée.

L'extraction des paramètres modaux est effectuée par la TO. Comme dans la section précédente, elle est appliquée sur le signal temporel de déplacement fourni par la corrélation d'images réalisée à l'aide du logiciel CMV.



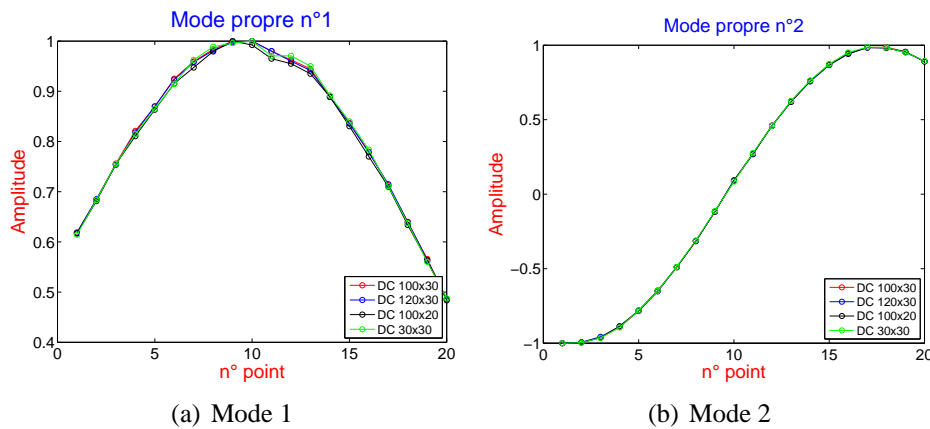


FIGURE 8.24 – Deux premiers modes propres obtenus à partir de la caméra pour différents domaines de corrélation (DC)

Les fréquences propres obtenues par corrélation d'images et les accéléromètres sont reportées dans le tableau 8.2.

Cas	Fréquences (Hz)			
	Caméra		Accéléromètres	
	1 <sup>ère</sup>	2 <sup>ème</sup>	1 <sup>ère</sup>	2 <sup>ème</sup>
<b>Poutre intacte</b>	74.84	206.54	74.56	205.92
<b>Cas 1</b>	74.43	205.93	74.30	205.73
Changement (%)	0.55	0.29	0.35	0.09
<b>Cas 2</b>	74.50	205.76	75.48	206.87
Changement (%)	0.46	0.38	1.23	0.46
<b>Cas 3</b>	74.63	205.78	74.98	206.19
Changement (%)	0.280	0.37	0.56	0.13
<b>Cas 4</b>	75.91	207.62	75.91	207.71
Changement (%)	1.42	0.52	1.80	0.87
<b>Cas 5</b>	75.43	207.07	76.14	208.04
Changement (%)	0.783	0.26	2.12	1.03

TABLEAU 8.2 – Fréquences propres et variations relatives des fréquences pour les 5 cas d'endommagement pour la corrélation d'images et les accéléromètres

Les déformées modales obtenues à partir de la corrélation d'images, sont représentées sur la figure 8.25. Le trou se trouve entre le point  $n^{\circ} 8$  et le point  $n^{\circ} 9$ . Les courbes ne se confondent pas comme pour le cas des accéléromètres mais aucune localisation ne peut-être considérée.

La figure 8.26 montrant les coefficients de MAC et COMAC, donne le degré de corrélation existante entre les déformées propres mesurées par corrélation d'images des 6 états. Cette variation est faible et ne confirme pas la présence d'un endommagement. En effet, cette corrélation est présente entre deux modes propres provenant de deux mesures d'un même état.

La figure 8.27 montre les résultats obtenus des trois méthodes de détection et de localisation fondées sur la courbure modale (courbure modale, courbure de flexibilité et énergie de déformation) et la mé-

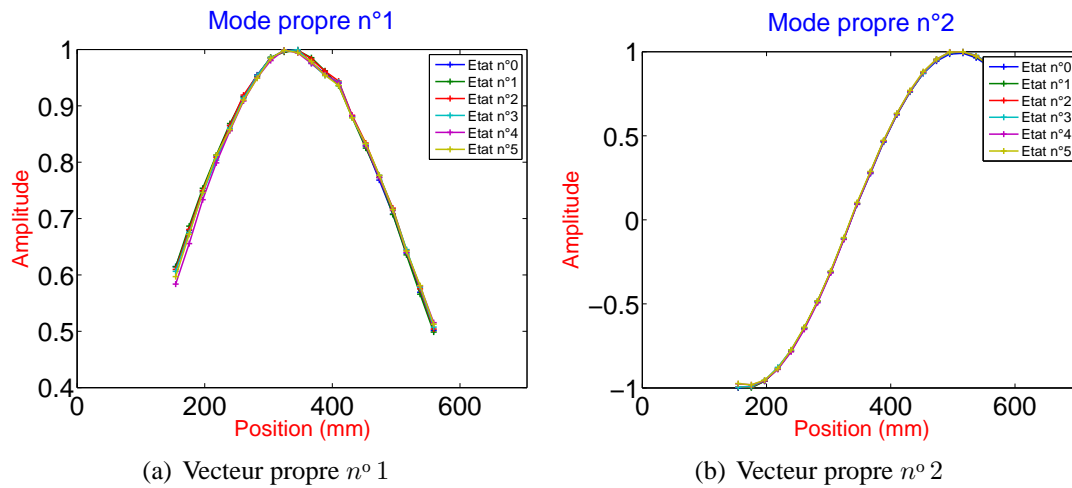


FIGURE 8.25 – Deux premiers modes propres obtenus pour les 6 états de la poutre

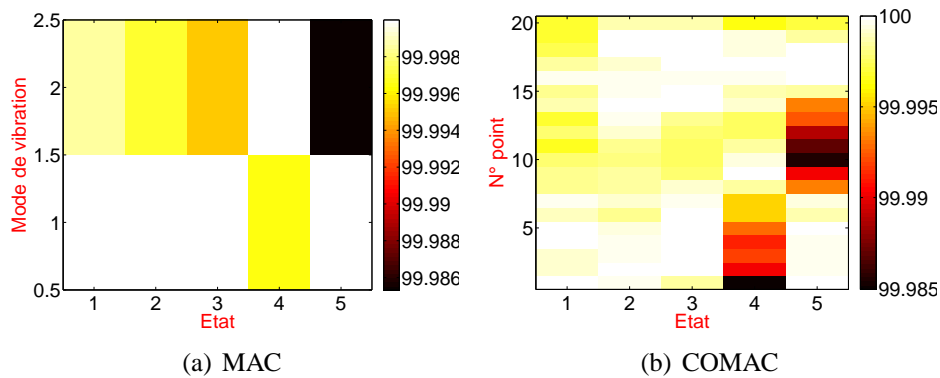


FIGURE 8.26 – Coefficients MAC et COMAC obtenus à partir de la corrélation d'images

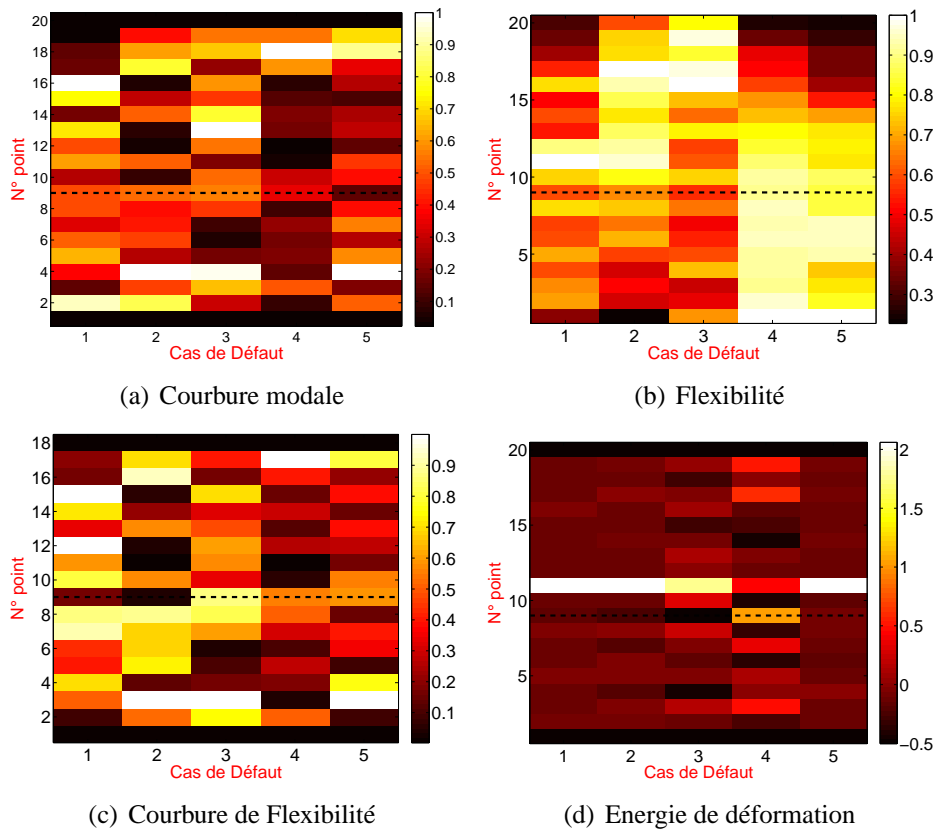
thode utilisant la flexibilité. Les valeurs sont normalisées par rapport à la valeur maximale de chaque état. On voit que les résultats sont très dispersés et qu'aucune localisation n'est précise. Cependant, l'énergie de déformation fourni des résultats satisfaisants pour les états 1, 2, 5. L'interprétation de ces résultats reste délicate puisque plusieurs paramètres contribuent dans la technique de corrélation d'images.

## 8.8 Confrontation Numérique-Expérience

Dans cette étude, l'état de la poutre intacte est choisi pour la comparaison. La réponse vibratoire de la poutre E-E est calculée sur Matlab par la méthode des éléments finis. Nous utilisons une amplitude de choc égale à celle mesurée par le capteur de force, qui est un choc impulsif d'amplitude 129 N à l'abscisse  $x_0 = 0.578$  m, et 4 modes sont pris en compte dans la réponse.

Pour confronter les résultats expérimentaux avec ceux obtenus numériquement, on a tracé sur la figure 8.28 le déplacement obtenu par la corrélation d'images, par double intégration des accélérations obtenues expérimentalement et par numériquement.

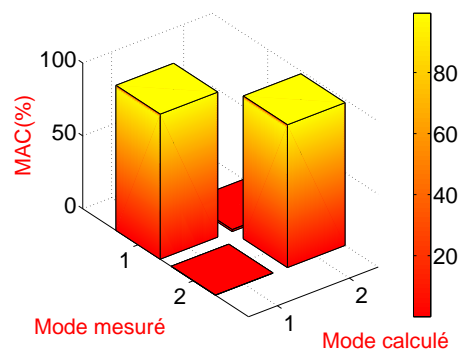
Les points de mesure ne correspondant jamais aux nœuds et les degrés de liberté du modèle EF, la



**FIGURE 8.27 – Méthodes de détection appliquées aux paramètres modaux identifiés à partir des mesures par la caméra. Le trait noir en pointillé indique la position du trou.**

fonction d'interpolation « spline » sur Matlab a été utilisée pour approximer les points de la grille utilisés dans la corrélation d'images. 20 points de mesure sont pris dans les simulations numériques. Par contre, pour les déplacements obtenus par double intégration des signaux d'accélération, il n'y a que 11 points correspondant aux 11 accéléromètres.

Afin d'identifier les caractéristiques modales de la poutre, les signaux ont été traités par la TO. Pour la confrontation calculs-essais, les modes propres ont été choisis comme un paramètre de comparaison. La figure 8.29 montre les deux premiers vecteurs propres numériques et ceux obtenus par corrélation d'images.



**FIGURE 8.30 – Matrice de MAC**

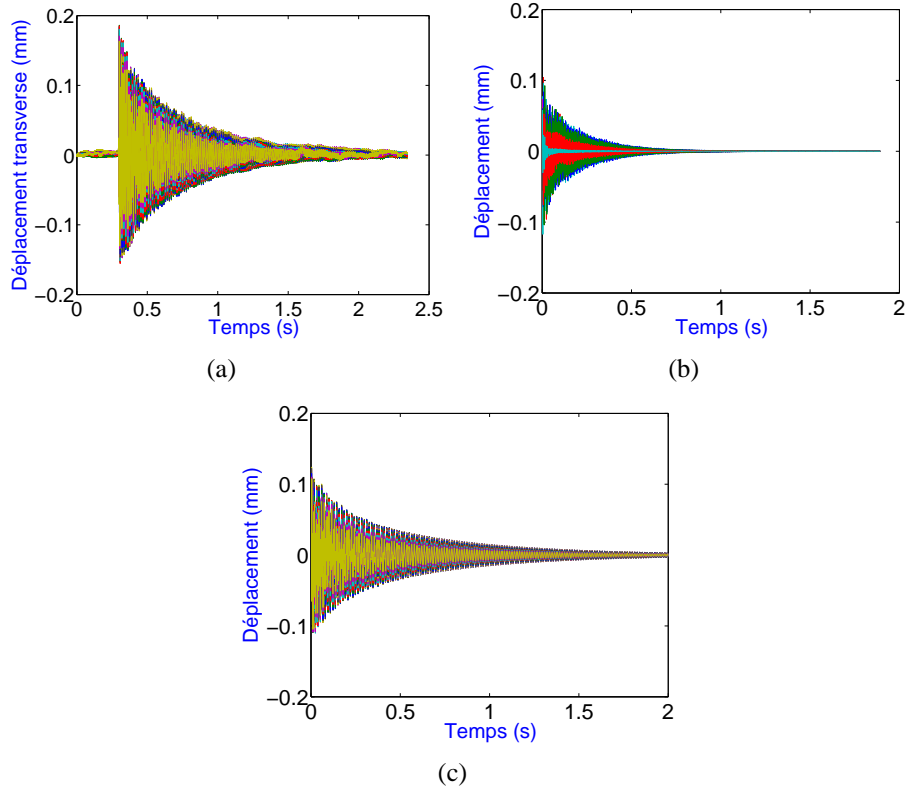


FIGURE 8.28 – Déplacement transverse obtenu (a) avec la corrélation d’images (b) par double intégration du signal d’un accéléromètre (c) numériquement

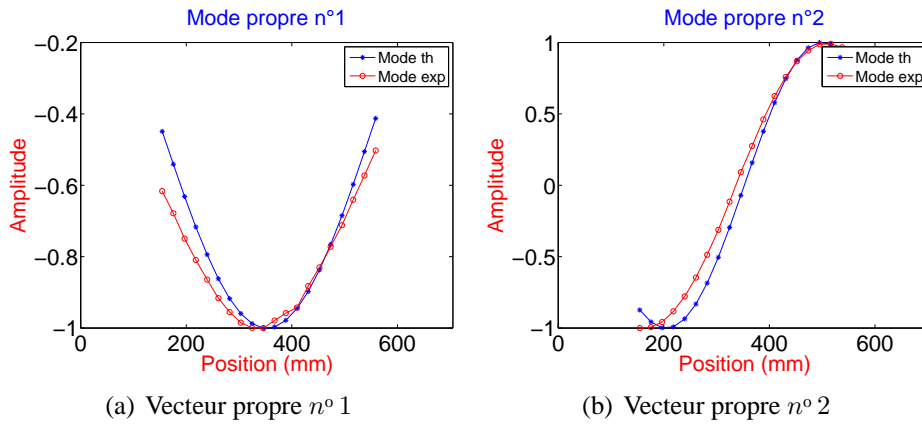


FIGURE 8.29 – Deux premiers vecteurs propres théoriques, numériques et par la caméra

Les courbes ne se superposent pas. Par conséquent, nous avons tracé sur la figure 8.30 le coefficient de corrélation  $MAC$  donné par l’expression (8.9) pour évaluer l’écart entre les deux vecteurs.

$$MAC_k = \frac{\sum_{k=1}^N (\phi_{num}^T \phi_{exp})^2}{\sum_{k=1}^N (\phi_{num}^T \phi_{num}) \times \sum_{k=1}^N (\phi_{exp}^T \phi_{exp})} \quad (8.9)$$

L’appariement entre les modes est ici supposé correct lorsque le  $MAC$  est supérieur à 0.8 ou 80%. Les deux modes sont bien appariés (Tab. 8.3). Il est possible de quantifier l’écart calcul-essai pour chaque mode apparié. L’écart entre les pulsations propres est calculé par la formule :

$$\Delta f_k(\%) = \left| \frac{f_k^c - f_k^m}{f_k^c} \right| \times 100$$

où  $f_k^c$  et  $f_k^m$  définissent les fréquences propres du  $k^{\text{ème}}$  mode calculé et mesuré par corrélation d'images respectivement.

Mode	MAC (%)	$\Delta f_k(\%)$
$n^{\circ} 1$	99.47	5.05
$n^{\circ} 2$	97.94	4.95

TABLEAU 8.3 – MAC calcul corrélation d'images

### Régression linéaire

Afin de décrire la relation entre les déformées modales numériques et expérimentales, nous allons chercher la loi de type :  $\phi_{exp} = a \times \phi_{num} + b$ .

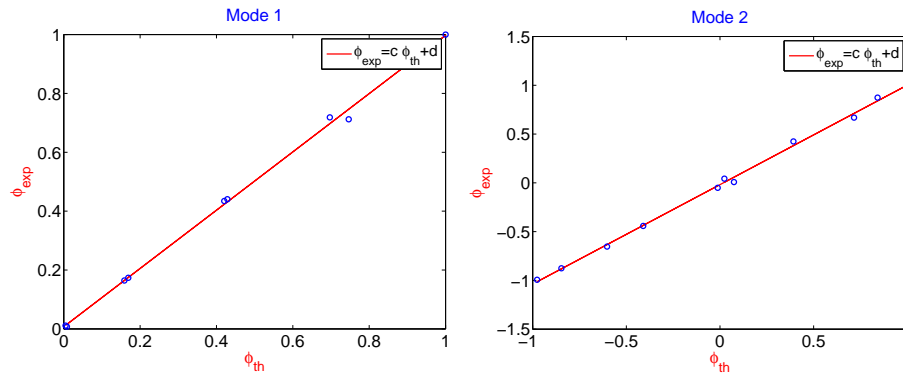


FIGURE 8.31 – Régression linéaire entre les modes propres théoriques et expérimentaux pour les deux premiers modes

L'estimateur des moindres carrés consiste à chercher la solution de la minimisation de la somme des carrés des écarts entre les valeurs numériques et les valeurs expérimentales en un point  $i$ , par rapport aux deux paramètres  $a$  et  $b$  :

$$S = \text{Argmin} \left( \sum_{i=1}^n (\phi_{exp}(x_i) - a * \phi_{num}(x_i) - b)^2 \right)$$

Cette minimisation conduit directement à :

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n (\phi_{num}(x_i) - \bar{\phi}_{num})(\phi_{exp}(x_i) - \bar{\phi}_{exp})}{\sum_{i=1}^n (\phi_{num}(x_i) - \bar{\phi}_{num})^2} \quad (8.10)$$

$$b = \bar{\phi}_{exp} - a \times \bar{\phi}_{num} \quad (8.11)$$

où  $\bar{\phi}_{num}$  et  $\bar{\phi}_{exp}$  représentent les valeurs moyennes des modes propres numériques et obtenus par corrélation d'images.

Mode	$a$	$b$	$R^2$
$n^{\circ} 1$	0.946	0.0786	0.967
$n^{\circ} 2$	-0.962	0.0644	0.987

TABLEAU 8.4 – Estimation des paramètres  $a$ ,  $b$  et  $R^2$ 

La figure 8.31 montre la régression linéaire entre les déformées expérimentales et numériques. Les droites s'accordent bien au nuage de points. Le tableau 8.4 reporte les valeurs de  $a$ ,  $b$  et  $R$ . Le coefficient de corrélation  $R$  est très voisin de 1. Donc la corrélation d'images est un outil qui permet d'identifier des champs de déplacement et les paramètres modaux extraits corréleront avec les résultats numériques.

## 8.9 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons analysé les images enregistrées par la caméra rapide, instrumentée sur la poutre E-E. Cette étude a été menée à l'aide du logiciel CMV. La corrélation d'images a permis d'identifier le déplacement temporel de la poutre sur la durée de l'excitation. L'identification des paramètres modaux de la poutre saine et endommagée pour quelques essais a été réalisée par la TO et nous avons trouvé qu'ils sont assez proches de ceux obtenus par les autres capteurs. Pour la détection d'endommagement à partir de quelques méthodes, nous n'avons pas pu détecter et localiser le trou correctement. Ceci peut provenir du bruit présent dans les images.

# Bibliographie

- [1] Bornert M., *Cours, Master MMS « Images et Mécanique »*, 2011.
- [2] Fazzini M., *Développement de méthodes d'intégration des mesures de champs*, Thèse Université de Toulouse, 2009.
- [3] Bornert M., Gaye A., *Mode d'emploi de CMV*, Revision 6, 14 septembre 2012.
- [4] Lombard B. et Gatuingt F., *Analyse par corrélation d'images d'essais d'impact sur poutres en Béton Armé*, LMT-Cachan, 31<sup>èmes</sup> Rencontres de l'AUGC, E.N.S. Cachan, 2013.
- [5] Chambart M., *Endommagement anisotrope et comportement dynamique des structures en béton armé jusqu'à la ruine*, Thèse, ENS Cachan, 2009.
- [6] Leroux A., *Modèle multiaxial d'endommagement anisotrope : Gestion numérique de la rupture et application à la ruine de structures en béton armé sous impacts*, Thèse, ENS Cachan, 2012.
- [7] Bornert M. et al., *Assessment of digital image correlation measurement errors : methodology and results*, Experimental Mechanics, 49(3), pp. 353-370, 2009.
- [8] Patsias S., Staszewski W.J., *Damage detection using optical measurements and Wavelets*, Structural Health Monitoring, 1(1), pp. 5-22, 2002.
- [9] MEScope Ves (VT-570), *Vibrant Technology Inc.*, <http://www.vibetech.com>.
- [10] Morlier J., Salom P., Bos F., *New image processing tools for structural dynamic monitoring*, Key Engineering Materials, 347, pp. 239-244, 2007.
- [11] Karama M., Lorrain B., *Modélisation numérique et expérimentale du comportement de structures sandwich*, Mécanique et Industries, 7, pp. 39-48, 2006.
- [12] D. Lecompte, J. Vantomme et H. Sol. *Crack detection in a concrete beam using two different camera techniques*, Structural Health Monitoring, 5(1), pp. 59-68, 2006.
- [13] Robert L., Nazaret F., Cutard T., Orteu J.-J., *Use of 3-D Digital image correlation to characterize the mechanical behavior of a fiber reinforced refractory castable*, Experimental Mechanics, 47(6), pp. 761-773, 2007.
- [14] Poudel P.U., Fu G., Ye J., *Structural damage detection using digital video imaging and wavelet transformation*, Journal of Sound and Vibration, 286(4-5), pp. 869-895, 2005.
- [15] Chanussot J., *Digital image processing*, Cours, Grenoble National Polytechnic Institute, 2002
- [16] Habra A., Jacquy F., *Evaluation du bruit dans une image*, Projet présenté dans le cadre du cours de Traitement d'Images de Henri Maitre.

## Chapitre 9

# Etude expérimentale des méthodes développées dans l'équipe

---

**C**<sup>E CHAPITRE</sup> s'attache à présenter l'application des deux méthodes de détection et de localisation de défaut, évoquées dans le chapitre 5 sur les données expérimentales de la poutre E-E trouée. La première est fondée sur la SVD et la deuxième sur la variation relative des fréquences. La deuxième méthode sera également testée avec des données expérimentales acquises pour la poutre EF avec un ajout de masse.

---



**Plan du Chapitre 9**

---

<b>9.1</b>	<b>Détection et localisation par la méthode utilisant la SVD . . . . .</b>	<b>219</b>
9.1.1	Application de la SVD sur les fréquences propres . . . . .	219
9.1.2	Application sur les déformées modales des accéléromètres . . . . .	220
9.1.3	Application sur les déformées modales des JLB . . . . .	221
<b>9.2</b>	<b>Détection par la méthode fondée sur les variations relatives des fréquences . .</b>	<b>226</b>
9.2.1	Recalage analytique-expérimentale . . . . .	226
9.2.2	Localisation du trou : poutre avec $\Delta EI(x)$ et $\Delta \mu(x)$ pris en compte . . . .	229
9.2.3	Localisation d'une masse ajoutée . . . . .	230
<b>9.3</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>234</b>
	<b>Bibliographie . . . . .</b>	<b>234</b>

---

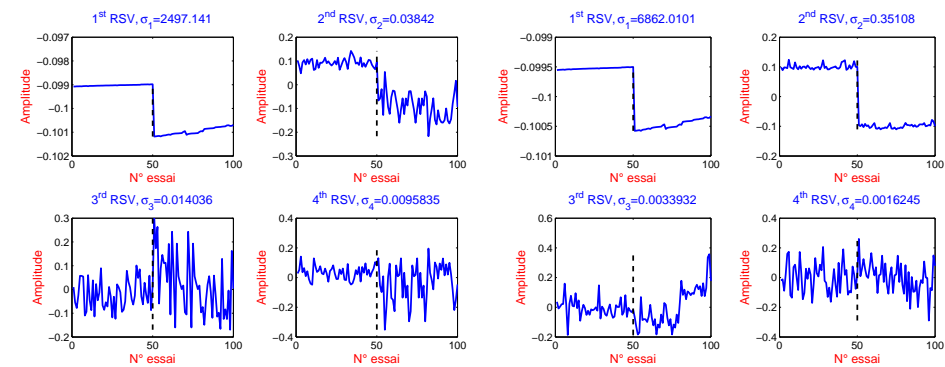
## 9.1 Détection et localisation par la méthode utilisant la SVD

Dans ce paragraphe nous avons appliqué la méthode utilisant la SVD sur les collections de fréquences propres et/ou de déformées modales extraites par la TO dans le chapitre 7 à partir de 50 essais aléatoirement choisis pour chaque état (sain et endommagé). Les mesures analysées sont issues des accéléromètres et des JLB placés sur la poutre. Afin d'alléger cette section, on ne présentera dans ce chapitre que les résultats obtenus pour la poutre à l'état sain et à l'état endommagé le plus sévère (trou de 10mm de diamètre) issus donc de 100 essais (50 pour l'état sain et 50 pour l'état endommagé qui sont choisis arbitrairement). L'ensemble des autres résultats est regroupé dans l'annexe F. Certes, la détection de l'endommagement devient moins précise lorsque la taille du défaut diminue, mais elle présente toujours des performances satisfaisantes.

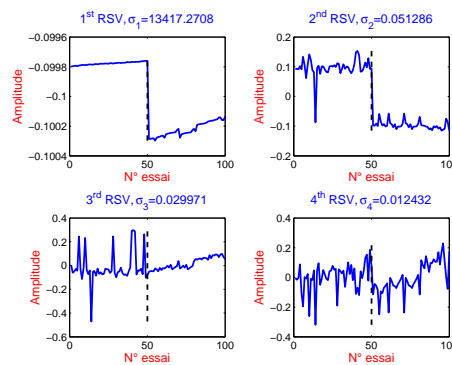
### 9.1.1 Application de la SVD sur les fréquences propres

L'application de la SVD sur la matrice des fréquences propres provenant de l'état sain et l'état endommagé permet de détecter un défaut (Fig. 9.1). A l'œil nu, nous pouvons déjà voir l'instant où apparaît le changement brutal des fréquences. Ceci peut être lié à un changement des conditions climatiques ou à un défaut physique.

Afin de vérifier ce résultat, nous avons appliqué la SVD sur la matrice des fréquences propres  $A_{\lambda}^{(1:100)}$



(a) RSVs de la collection des fréquences du 1<sup>er</sup> mode (b) RSVs de la collection des fréquences du 2<sup>èmes</sup> mode



(c) RSVs de la collection des fréquences du 3<sup>èmes</sup> mode

FIGURE 9.1 – Quatre premiers vecteurs singuliers à droite (RSV pour right singular vector) de la matrice de l'évolution des fréquences propres  $A_{\lambda}^{(1:100)}$  pour les accéléromètres

qui contient les 100 essais de l'état sain. La figure 9.2 montre les quatre premiers vecteurs singuliers à droite. On voit que plusieurs petites discontinuités apparaissent mais il n'y en a pas une qui permet de détecter l'instant de l'apparition d'un endommagement. Ces discontinuités sont en effet dues aux variations de fréquences propres observées pour quelques essais sur la figure 7.15.

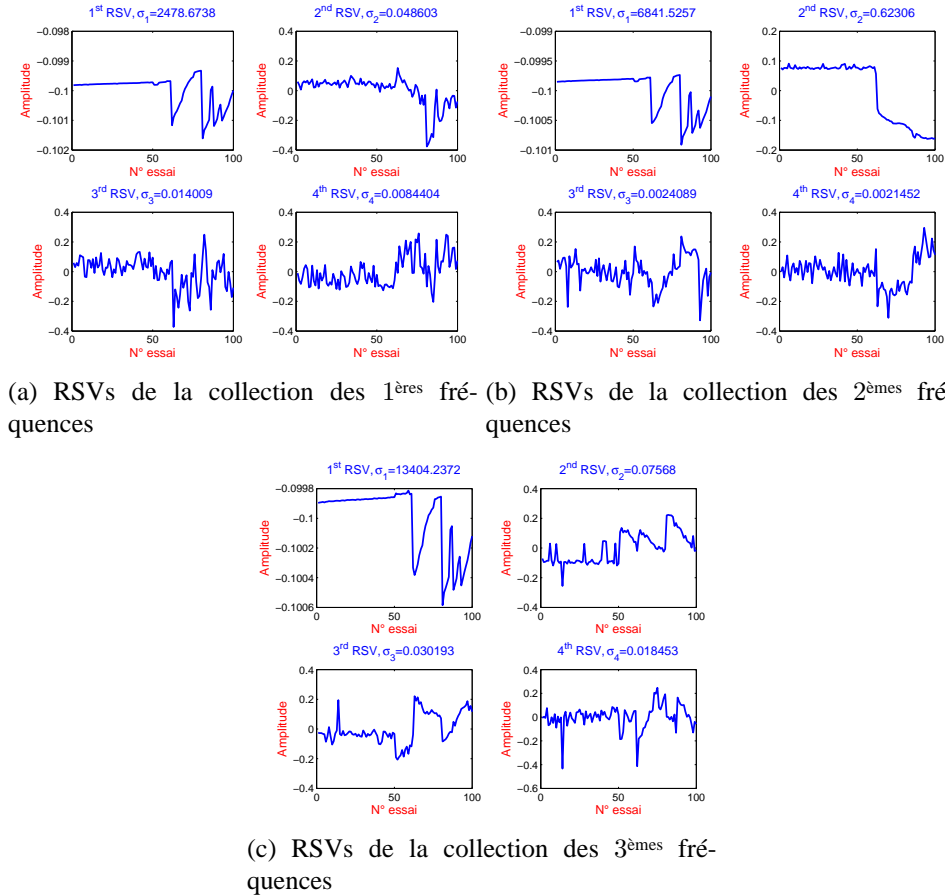
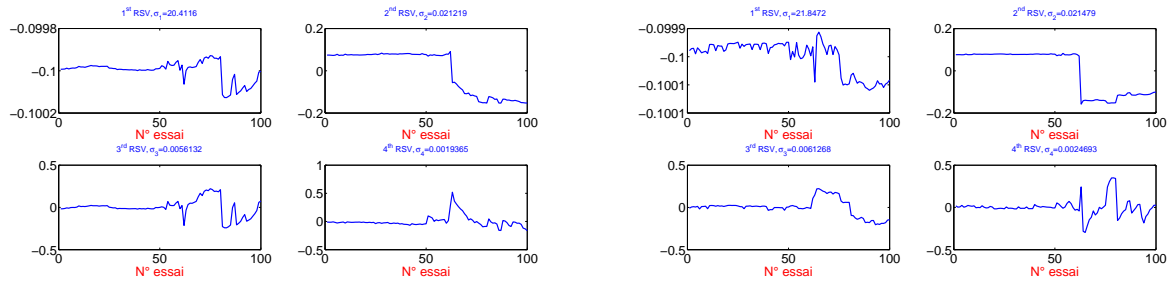


FIGURE 9.2 – Quatre premiers vecteurs singuliers à droite (RSV pour right singular vector) de la matrice de collection des fréquences propres avant l'apparition du trou  $A_{\lambda}^{(1:100)}$  pour les accéléromètres

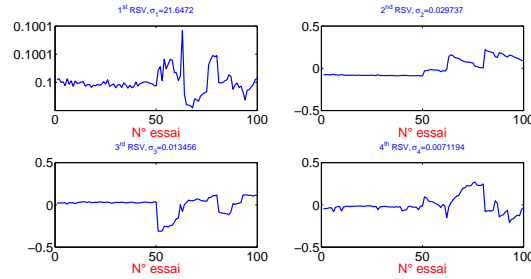
### 9.1.2 Application sur les déformées modales des accéléromètres

Nous avons appliqué maintenant la SVD sur les collections de déformées modales. Chacune des figures 9.3 à 9.5 est composée de trois graphiques relatifs aux trois modes. Par exemple, les figures 9.5(a), 9.5(b) et 9.5(c) présentent les vecteurs singuliers à droite obtenus respectivement à partir de la collection du premier mode, du deuxième mode et du troisième mode (50 essais pour l'état sain de la poutre E-E et 50 essais pour l'état 5).

Avec les résultats des trois modes, nous pouvons détecter l'endommagement qui apparaît à l'essai numéro 51. Cependant pour la figure 9.3, n'utilisant que des collections saines, ne montre aucune discontinuité visible à cet endroit. Les vecteurs singuliers à gauche sont ensuite tracés (Fig. 9.6(a), 9.6(b) et 9.6(c)). A partir du deuxième vecteur singulier à gauche, nous arrivons à localiser correctement l'endommagement situé à l'abscisse  $x_0 = 321mm$ . Ce n'est pas le cas en revanche pour les



(a) RSVs de la collection des déformées modales du 1<sup>er</sup> mode (b) RSVs de la collection des déformées modales du 2<sup>ème</sup> mode



(c) RSVs de la collection des déformées modales du 3<sup>ème</sup> mode

FIGURE 9.3 – Quatre premiers vecteurs singuliers à droite (RSV pour right singular vector) de la matrice de collection des déformées modales  $A_{\phi}^{(1:100)}$  pour les accéléromètres - Poutre saine

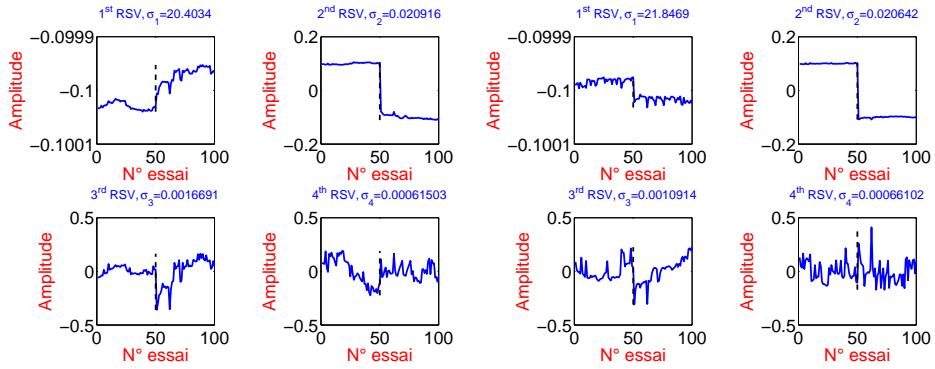
autres vecteurs, ce qui peut s'expliquer par le nombre limité des capteurs (11 accéléromètres) [1]. On remarque d'autre part que le premier vecteur singulier à gauche représente la tendance principale de l'ensemble des vecteurs colonnes de la matrice A.

### 9.1.3 Application sur les déformées modales des JLB

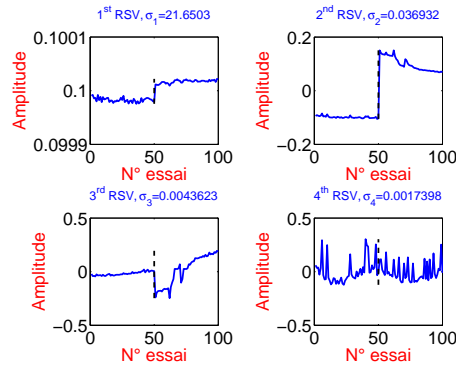
Sur les figures 9.7(a), 9.7(b) et 9.7(c) sont illustrés les vecteurs singuliers à droite respectivement de la collection des déformées modales du premier mode, deuxième mode et du troisième mode obtenus pour les JLB de 100 essais réalisés, dont 50 essais à l'état sain et 50 essais à l'état 5.

La figure montre que la présence du défaut n'est pas détecté pour tous les modes du fait du faible ratio signal sur bruit (SNR) pour les JLB. Cependant pour la SVD appliquée sur la collection des déformées modales du 1<sup>er</sup> mode  $\Psi_1$ , une chute brutale apparaît à l'essai n° 50. Au niveau de la localisation (Fig. 9.8), un pic plus précis apparaît sur les deuxièmes vecteurs singuliers droits obtenus à partir des déformées modales des modes n° 1 et n° 2.

Comme pour les accéléromètres, le premier vecteur singulier gauche représente la tendance principale de l'ensemble des vecteurs colonnes de la matrice A traitée, en l'absence de la matrice des intégrales des courbures modales.



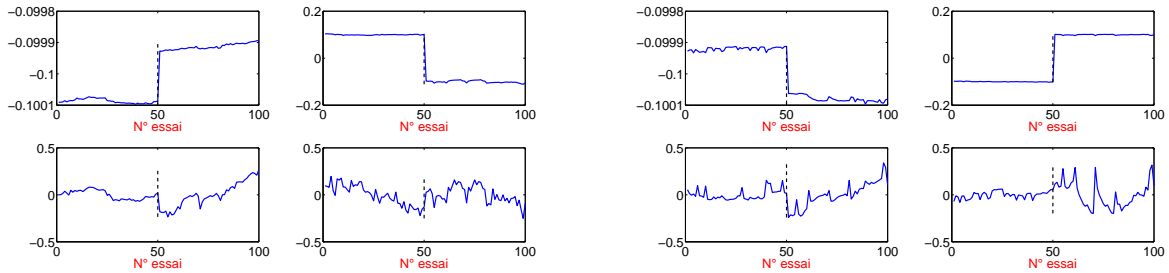
(a) RSVs de la collection des déformées modales du 1<sup>er</sup> mode



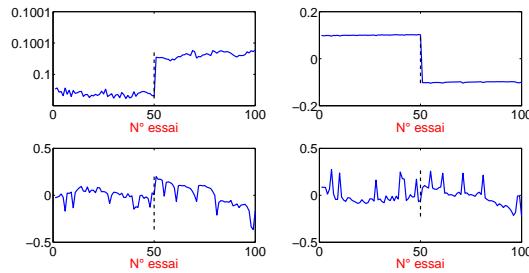
(b) RSVs de la collection des déformées modales du 2<sup>ème</sup> mode

(c) RSVs de la collection des déformées modales du 3<sup>ème</sup> mode

**FIGURE 9.4 – Quatre premiers vecteurs singuliers à droite (RSV pour right singular vector) de la matrice de collection des déformées modales  $A_{\phi}^{(1:100)}$  pour les accéléromètres - Trou 2mm**



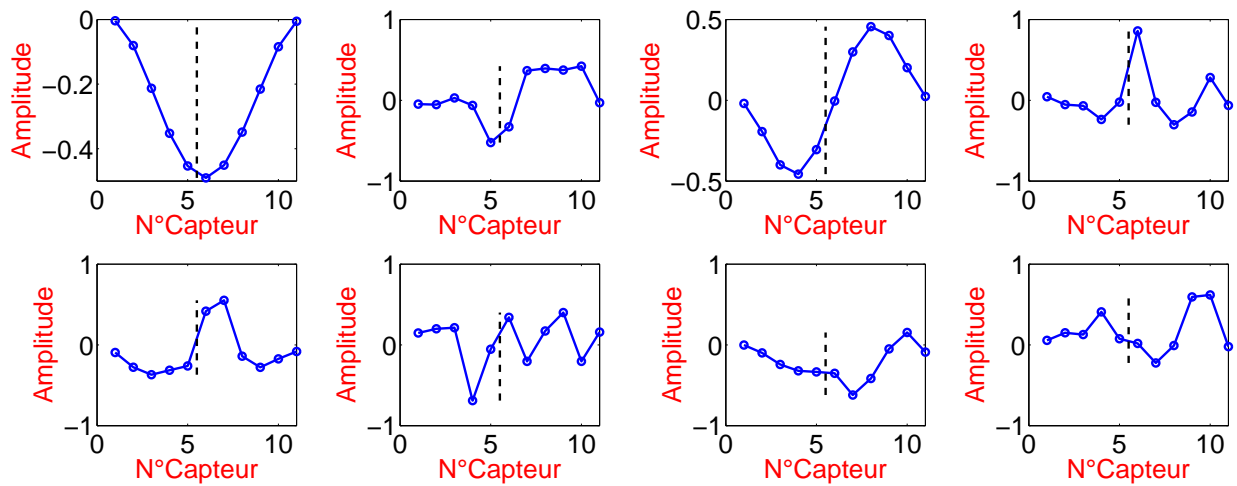
(a) RSVs de la collection des déformées modales du 1<sup>er</sup> mode



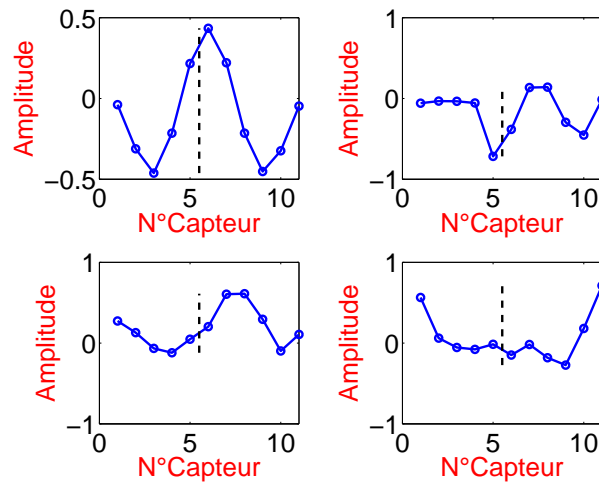
(b) RSVs de la collection des déformées modales du 2<sup>ème</sup> mode

(c) RSVs de la collection des déformées modales du 3<sup>ème</sup> mode

**FIGURE 9.5 – Quatre premiers vecteurs singuliers à droite (RSV pour right singular vector) de la matrice de collection des déformées modales  $A_{\phi}^{(1:100)}$  pour les accéléromètres - Trou 10mm**

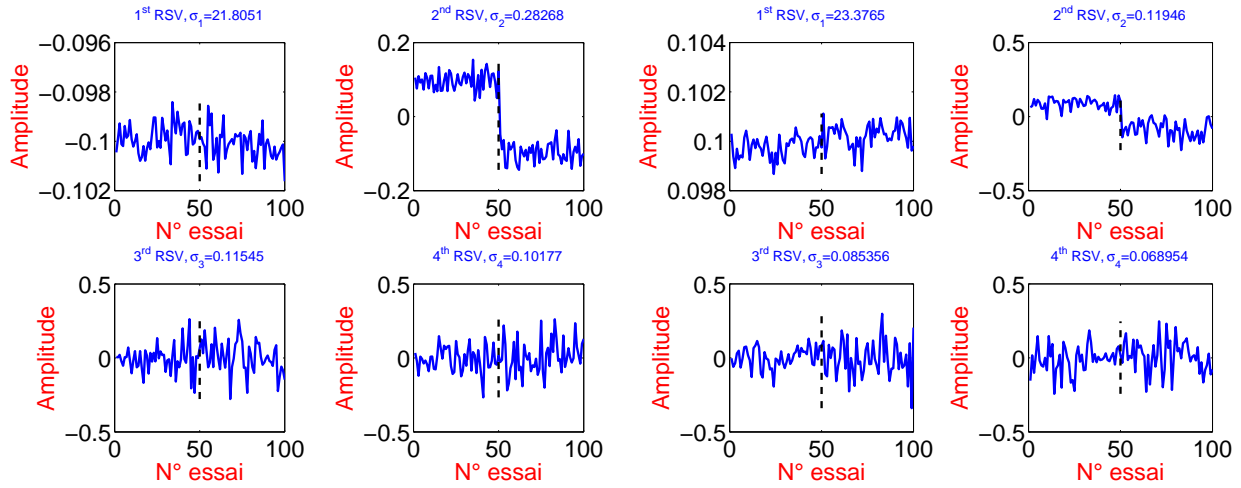


(a) LSVs de la collection des déformées modales du 1<sup>er</sup> mode (b) LSVs de la collection des déformées modales du 2<sup>ème</sup> mode

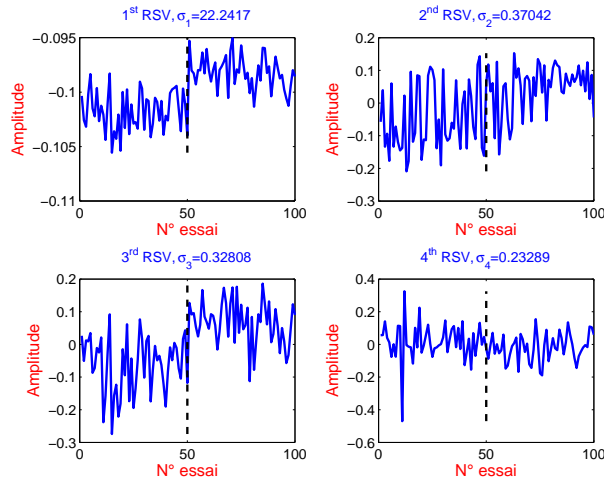


(c) LSVs de la collection des déformées modales du 3<sup>ème</sup> mode

FIGURE 9.6 – Quatre premiers vecteurs singuliers à gauche (LSV pour left singular vector) de la matrice de collection des déformées modales  $A_{\phi}^{(1:100)}$  pour les accéléromètres - Trou 10mm

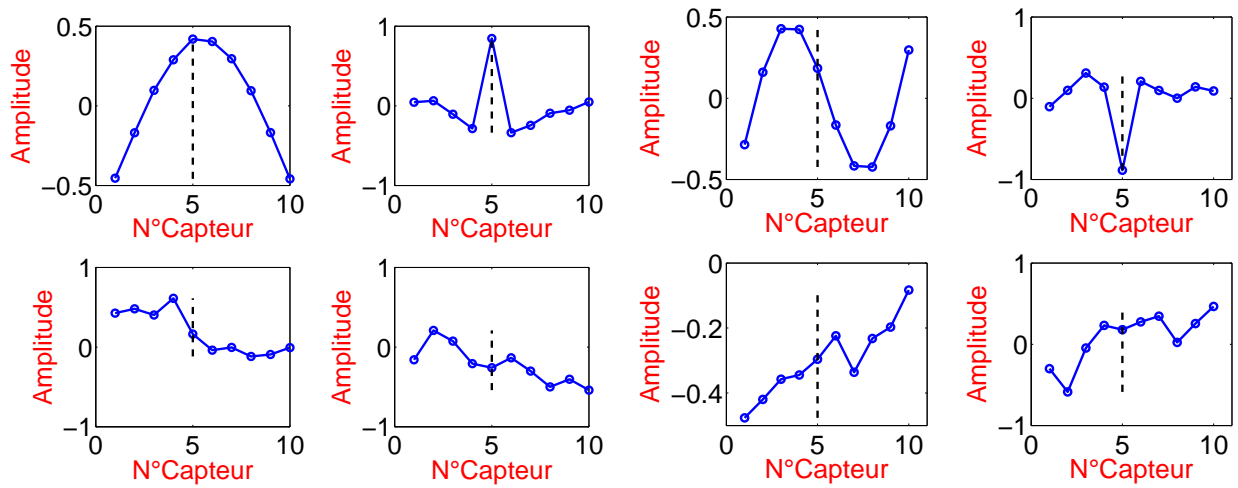


(a) RSVs de la collection des déformées modales du 1<sup>er</sup> mode (b) RSVs de la collection des déformées modales du 2<sup>ème</sup> mode

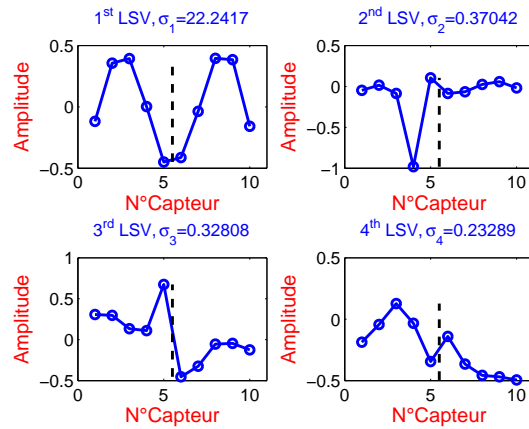


(c) RSVs de la collection des déformées modales du 3<sup>ème</sup> mode

**FIGURE 9.7 – Quatre premiers vecteurs singuliers à droite (RSV pour right singular vector) de la matrice de collection des vecteurs propres  $A_{\Psi}^{(1:100)}$  pour les JLB - Trou 10mm**



(a) LSVs de la collection des déformées modales du 1<sup>er</sup> mode (b) LSVs de la collection des déformées modales du 2<sup>ème</sup> mode



(c) LSVs de la collection des déformées modales du 3<sup>ème</sup> mode

FIGURE 9.8 – Quatre premiers vecteurs singuliers à gauche (LSV pour left singular vector) de la matrice de collection des déformées modales  $A_{\Psi}^{(1:100)}$  pour les JLB - Trou 10mm



## 9.2 Détection par la méthode fondée sur les variations relatives des fréquences

Maintenant, nous nous intéressons au problème de la localisation et de la quantification des modifications physiques par la méthode fondée sur les variations relatives des fréquences [2, 3] décrite dans le chapitre 5. Les données expérimentales utilisées sont celles issues du chapitre 7.

### 9.2.1 Recalage analytique-expérimentale

La méthode utilise la déformée modale analytique et ses deux premières dérivées afin d'estimer la variation relative des fréquences. Cependant, un recalage du modèle présenté en annexe E permet d'améliorer la représentativité du modèle numérique sur la base des données expérimentales. La corrélation entre les résultats du calcul analytique et l'expérience permettra également d'évaluer la pertinence du modèle.

#### Calcul des constantes $\beta_k L$

Les coefficients expérimentaux  $\beta_k L$  correspondants aux conditions aux limites E-E sont calculés à partir des fréquences propres identifiées à partir des mesures des accéléromètres Soient  $f_1 = 74.55 Hz$ ,  $f_2 = 205.90 Hz$ ,  $f_3 = 403.62 Hz$  et  $f_4 = 678.82 Hz$  pour la série d'essais répétables. Nous obtenons alors les  $\beta_k L$  expérimentaux (Tab. 9.1) par l'expression :

$$\beta_k L = \sqrt{(2\pi f_k) L^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}} \quad \text{avec } k = 1 \text{ à } 4.$$

Mode	$\beta_k L$	
	<i>th</i>	<i>exp</i>
<i>n</i> ° 1	4.73	4.60
<i>n</i> ° 2	7.85	7.64
<i>n</i> ° 3	10.99	10.70
<i>n</i> ° 4	14.137	13.88

TABLEAU 9.1 – Coefficients  $\beta_k L$  théoriques et expérimentaux

Ainsi, les coefficients de l'équation analytique de la déformée modale d'une poutre E-E en flexion (Eq :9.1) sont ajustés tout en minimisant l'écart entre les déformées modales obtenues expérimentalement et analytiquement.

$$\phi_k^{(th)}(x) = a_k \times \frac{\cos(\beta_k L) - \cosh(\beta_k L)}{\sinh(\beta_k L) - \sin(\beta_k L)} \left( \sinh(\beta_k x) - \sin(\beta_k x) \right) + \left( \cosh(\beta_k x) - \cos(\beta_k x) \right) \quad (9.1)$$

Soient :

$$A_k(x_i) = \frac{\cos(\beta_k L) - \cosh(\beta_k L)}{\sinh(\beta_k L) - \sin(\beta_k L)} \left( \sinh(\beta_k x_i) - \sin(\beta_k x_i) \right) \text{ et } B_k(x_i) = \left( \cosh(\beta_k x_i) - \cos(\beta_k x_i) \right)$$

Il s'agit donc de résoudre le problème suivant :

$$\begin{pmatrix} \phi_k(x_1) \\ \phi_k(x_2) \\ \vdots \\ \vdots \\ \phi_k(x_{11}) \end{pmatrix} = (a_k) \times \begin{pmatrix} A_k(x_1) \\ A_k(x_2) \\ \vdots \\ \vdots \\ A_k(x_{11}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_k(x_1) \\ B_k(x_2) \\ \vdots \\ \vdots \\ B_k(x_{11}) \end{pmatrix}$$

d'où :

$$\begin{pmatrix} \phi_k(x_1) - B_k(x_1) \\ \phi_k(x_2) - B_k(x_2) \\ \vdots \\ \vdots \\ \phi_k(x_{11}) - B_k(x_{11}) \end{pmatrix} = (a_k) \times \begin{pmatrix} A_k(x_1) \\ A_k(x_2) \\ \vdots \\ \vdots \\ A_k(x_{11}) \end{pmatrix}$$

où  $\phi_k(x_i)$  représente la valeur de la déformée modale expérimentale du  $k^{\text{ème}}$  mode obtenue avec l'accéléromètre à la position  $x_i$  (11 accéléromètres).

Le problème revient donc à résoudre pour chaque mode  $k$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ), un système de 11 équations lineaires à 1 inconnue ( $a_k$ ) par la méthode des moindres carrés.

Ce recalage de déformées modales fournira ainsi finalement la constante multiplicative manquante  $a_k$  pour chacun des modes. Le tableau 9.2 donne la valeur de  $a_k$  pour chacun des modes.

Mode	$a_k$
$n^{\circ} 1$	1.007
$n^{\circ} 2$	0.9997
$n^{\circ} 3$	1
$n^{\circ} 4$	1

TABLEAU 9.2 – Les paramètres  $a_k$  venant du recalage de l'équation 9.1

La figure 9.9 illustre la première déformée modale analytique recalée et les points obtenus expérimentalement.

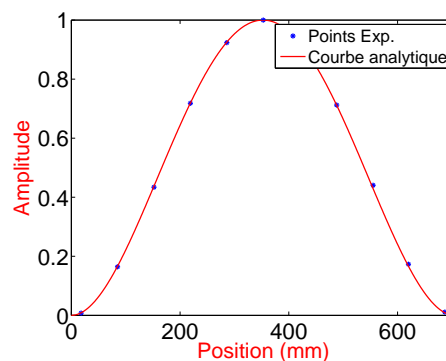


FIGURE 9.9 – Points expérimentaux pour la déformée modale du 1<sup>er</sup> mode et première déformée modale analytique recalée

Le couple  $(\phi_k^{(th)}, \phi_k^{(exp)})$  forme un nuage statistique qui se traduit par la recherche de la dépendance entre les deux par la relation  $\phi_k^{(exp)}(i) = f(\phi_k^{(th)}(i))$ . Dans ce cas, une régression linéaire peut s'appliquer. Nous cherchons alors la droite  $\phi_k^{(exp)}(i) = c \times \phi_k^{(th)}(i) + d$  qui décrive au mieux la tendance du nuage observé.

Il faut alors rechercher la droite  $y = cx + d$  (droite des moindres carrés). La minimisation de la somme des carrés des écarts entre les valeurs expérimentales et les valeurs théoriques par rapport aux deux paramètres  $c$  et  $d$  fournit :

$$c_k = \frac{\sum_{i=1}^n (\phi_k^{(th)}(i) - \overline{\phi_k^{(th)}})(\phi_k^{(exp)}(i) - \overline{\phi_k^{(exp)}})}{(\phi_k^{(th)}(i) - \overline{\phi_k^{(th)}})^2} \quad (9.2)$$

$$d_k = \overline{\phi_k^{(exp)}} - c_k \times \overline{\phi_k^{(th)}} \quad (9.3)$$

avec  $\overline{\phi_k^{(th)}}$  et  $\overline{\phi_k^{(exp)}}$  les moyennes de  $\phi_k^{(th)}$  et  $\phi_k^{(exp)}$  respectivement.

La figure 9.10 illustre les droites de régression linéaire entre les modes expérimentaux et les modes théoriques. Le tableau 9.3 reporte les paramètres  $c$ ,  $d$  et  $R^2$  obtenus par la régression linéaire.

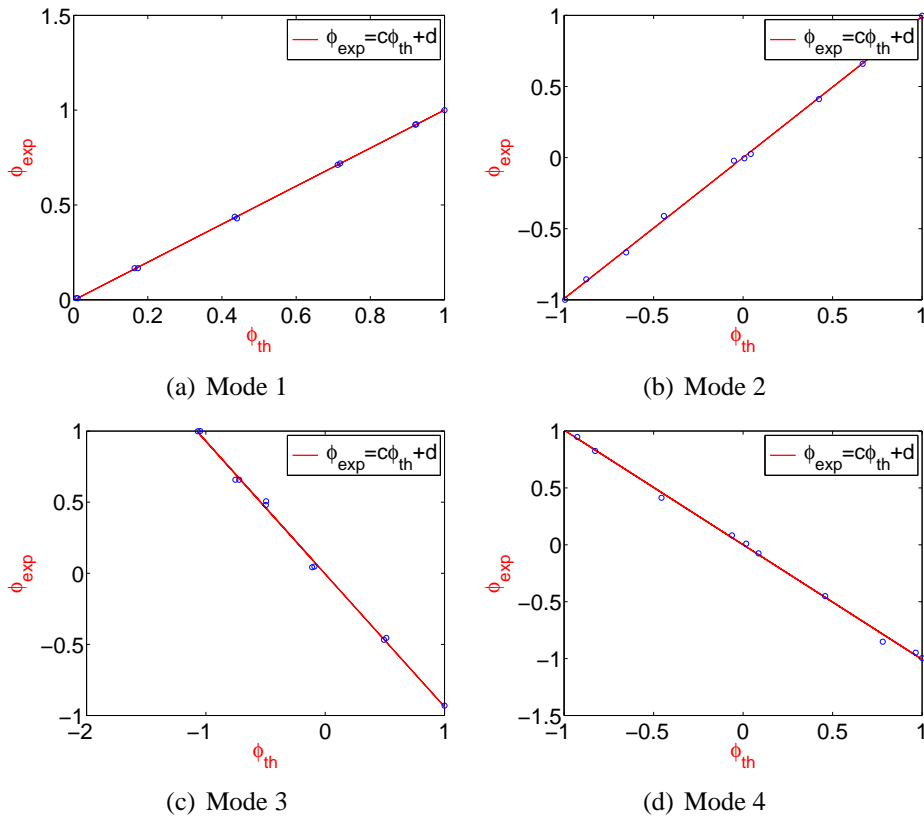


FIGURE 9.10 – Droites de régression linéaire entre  $\phi_k^{exp}$  et  $\phi_k^{th}$

Pour évaluer le degré de corrélation entre les déformées modales théoriques recalées et les déformées modales expérimentales, nous avons calculé les coefficients  $MAC$ . La figure 9.11 montre que les valeurs du  $MAC$  sont proches de 1 indiquant donc une bonne corrélation.

Mode	$c$	$d$	$R^2$
$n^{\circ} 1$	0.990	0.0072	0.9983
$n^{\circ} 2$	1.020	-0.0188	0.9979
$n^{\circ} 3$	-1.070	-0.010	0.9916
$n^{\circ} 4$	-0.942	0.077	0.9294

TABLEAU 9.3 – Résultats de la régression linéaire pour les paramètres  $c$ ,  $d$  et  $R^2$

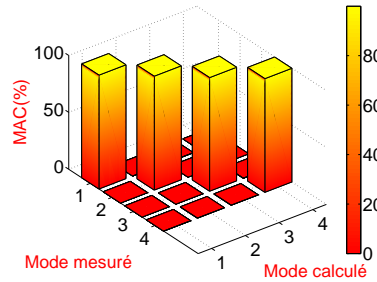


FIGURE 9.11 – MAC : déformées modales théoriques recalées vs déformées modales expérimentales

### 9.2.2 Localisation du trou : poutre avec $\Delta EI(x)$ et $\Delta \mu(x)$ pris en compte

Dans ce paragraphe, nous appliquons la méthode fondée sur les variations relatives des fréquences pour tenter de localiser le trou de différents diamètres. La poutre E-E est supposée avoir une tension nulle, une perte de rigidité  $\Delta EI(x)$  et de masse linéique  $\Delta \mu(x)$  dues au trou et respecter l'approximation  $\Delta L \ll L$ , c'est-à-dire que la taille du trou est petite devant à la longueur de la poutre. Il s'agit dans ce cas, comme mentionné dans le chapitre 5.2.2, de minimiser la fonction  $F_{m,n,k}(x)$  définie dans [1] par :

$$|F_{m,n,k}(x)| = \left[ \frac{\Delta f_n}{f_n} H_m(x) - \frac{\Delta f_m}{f_m} H_n(x) \right] [G_n(x) H_k(x) - G_k(x) H_n(x)] - \left[ \frac{\Delta f_n}{f_n} H_k(x) - \frac{\Delta f_k}{f_k} H_n(x) \right] [G_n(x) H_m(x) - G_m(x) H_n(x)] \quad (9.4)$$

Trois fréquences propres au minimum sont donc nécessaires. Les premières fréquences propres obtenues par la TO à partir des accéléromètres (section 7.5) pour les 6 états de la poutre E-E sur 20 essais répétables sont utilisées. Il convient à ce stade de noter que cette méthode est très sensible au choix des fréquences propres utilisées, la dispersion des fréquences propres obtenues expérimentalement induite par le bruit de mesure peut affecter significativement les résultats. En effet, les conditions aux limites expérimentales introduisent une variabilité inévitable dans les mesures, généralement du fait de l'impossibilité d'avoir des encastrements parfaits.

Pour les déformées modales, la déformées analytiques recalées de la poutre saine obtenues dans le paragraphe 9.2.1 sont utilisées. L'état de référence est évidemment l'état de la poutre saine. La figure 9.12 montre les  $Q_3(x)$ . On voit que la courbe est symétrique par rapport au centre de la poutre.

La valeur minimale se trouve à  $x_m = 291.2mm$  ce qui n'est pas si éloigné de la position réelle du trou,

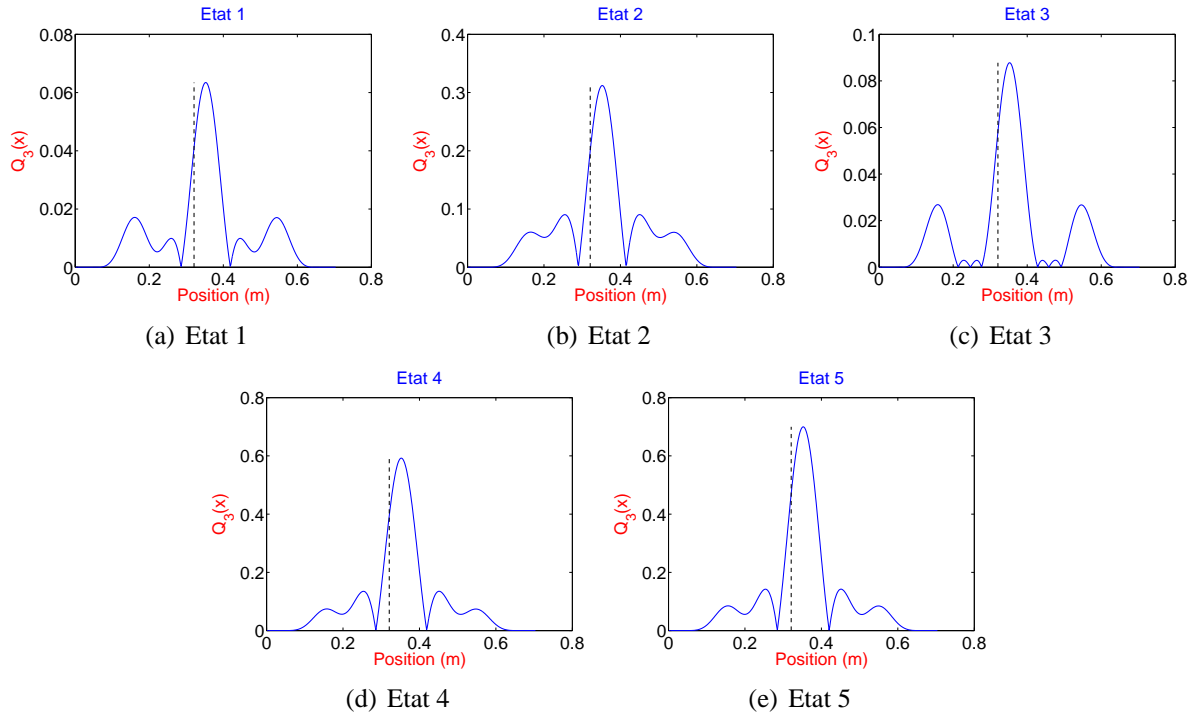


FIGURE 9.12 –  $Q_3(x)$  obtenus pour les 5 cas de défaut. Le trait noir en pointillé indique la position réelle du défaut.

$x_0 = 321mm$ . Cependant, ceci ne nous a pas surpris puisque nous avons démontré numériquement que 3 modes sont insuffisants pour localiser avec précision un endommagement.

Ainsi pour une dizaine d'essais répétables, pour chacun des 6 états de la poutre, les fréquences propres des modes  $n^o 4$ ,  $n^o 5$  et  $n^o 6$ . Afin de mieux visualiser les fonctions à minimiser, nous avons tracé  $\hat{Q}_n(x)$  qui est la fonction normalisée sur la figure 9.13 et définie par :

$$\hat{Q}_n(x) = \frac{Q_n(x)}{\|Q_n\|_\infty} \quad (9.5)$$

Les graphes ne montrent aucune amélioration dans les résultats pour des modes plus élevés. Peu de temps a été consacré à l'analyse de ces résultats puisque cette étude a été réalisée à la fin de la thèse. Pour l'instant, aucune explication concluante n'a pu être avancée malgré différentes hypothèses testées (taille du défaut trop importante et prise en compte de la tension notamment).

### 9.2.3 Localisation d'une masse ajoutée

Pour cette application, un ajout de masse est considéré sur la poutre précédente à l'état 5. Cette masse est additionnée au niveau du trou existant de  $10mm$  de diamètre. Une vis filetée de diamètre  $10mm$ , deux écrous et deux rondelles sont utilisés afin de reprendre la rigidité perdue à cause du trou. Ce cas est donc l'état de référence. Le tableau ci-dessous récapitule les caractéristiques des masses ajoutées qui déterminent les états modifiés.

Dans cette étude, nous avons effectué 10 essais par cas de masse ajoutée et nous avons identifié les 5 premières fréquences propres pour localiser avec précision la masse supplémentaire.

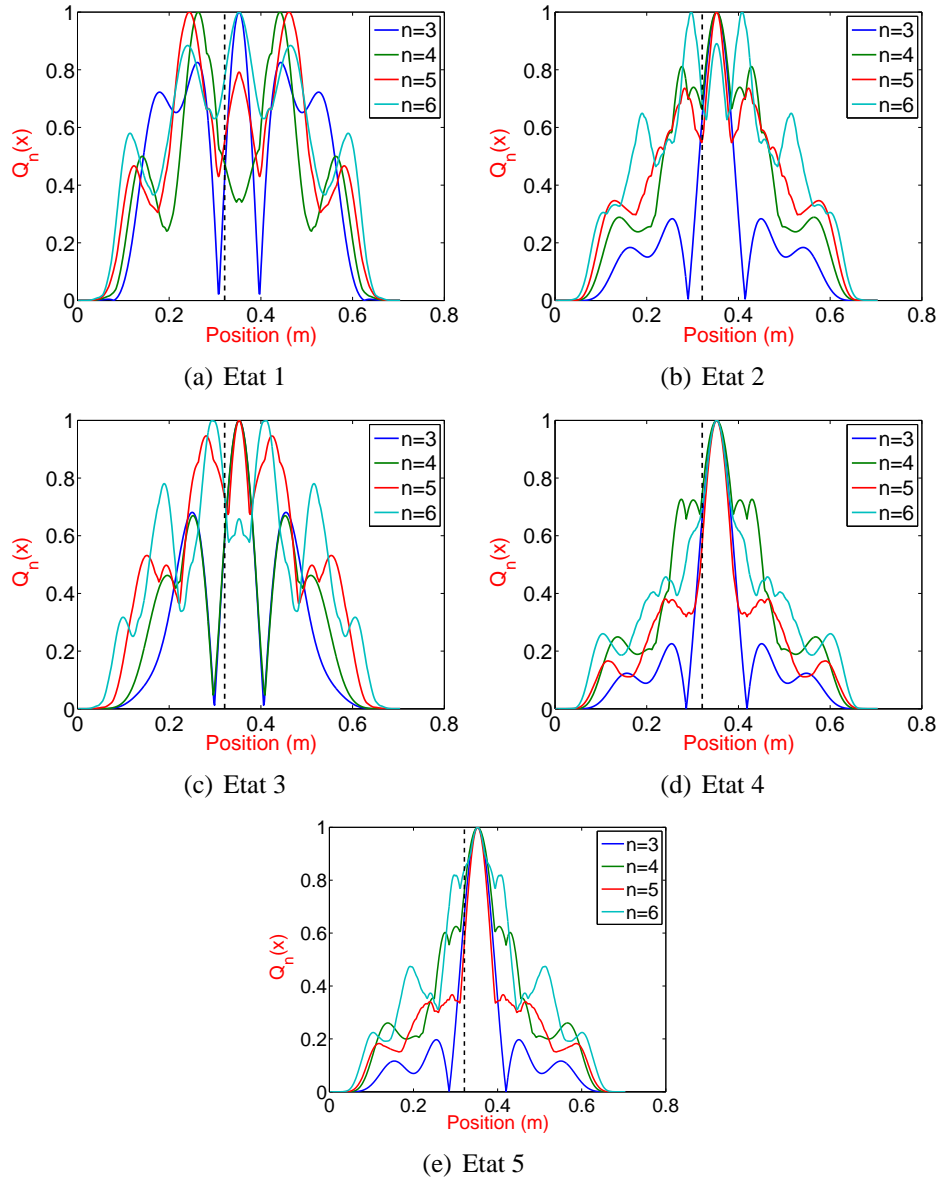


FIGURE 9.13 –  $\hat{Q}_n(x)$  obtenus pour les 5 cas de défaut. Le trait noir en pointillé indique la position réelle du défaut.

Les cinq premières fréquences propres identifiées par la TO à partir des signaux fournis par les accéléromètres sont répertoriées dans le tableau 9.5 et correspondent aux différents cas de la poutre E-E.

Le tableau 9.6 reporte les variations relatives des fréquences propres entre les états modifiés qui correspondent aux deux derniers ajouts de masse et l'état de référence qui est celui de la poutre avec une vis, deux écrous et deux rondelles au niveau du trou de 10mm.

Dans ce cas, des modifications de masse sont présentes, la variation relative de fréquence s'écrit alors :

$$\frac{\Delta f_n}{f_n} \approx -H_n(x_0) \frac{\Delta \mu \Delta L}{\mu L} \quad (9.6)$$

Nous avons besoin d'au moins deux modes propres pour chercher le minimum de la fonction  $Q_l(x)$

Etat	Type	Masse (g)	Changement de masse $\frac{\Delta\mu}{\mu}(\%)$
$n^o 1$	une vis, <b>quatre</b> écrous et deux rondelles	7.5	0.31
$n^o 2$	une vis, <b>six</b> écrous et deux rondelles	9.5	0.62

TABLEAU 9.4 – Caractéristiques des ajouts de masse

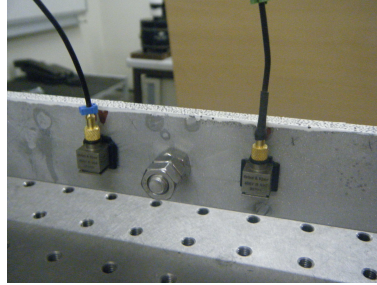


FIGURE 9.14 – Poutre avec une masse ajoutée

définie par :

$$Q_l(x) = \sum_{1 < n, m < l} |F_{n,m}(x)| \quad (9.7)$$

L'objectif est de vérifier la performance de la méthode pour la localisation selon la quantité de masse ajoutée. On utilisera alors la fonction normée  $\hat{Q}_n = \frac{Q_n(x)}{\|Q_n\|_\infty}$  avec  $n = 2$  dans un premier temps.

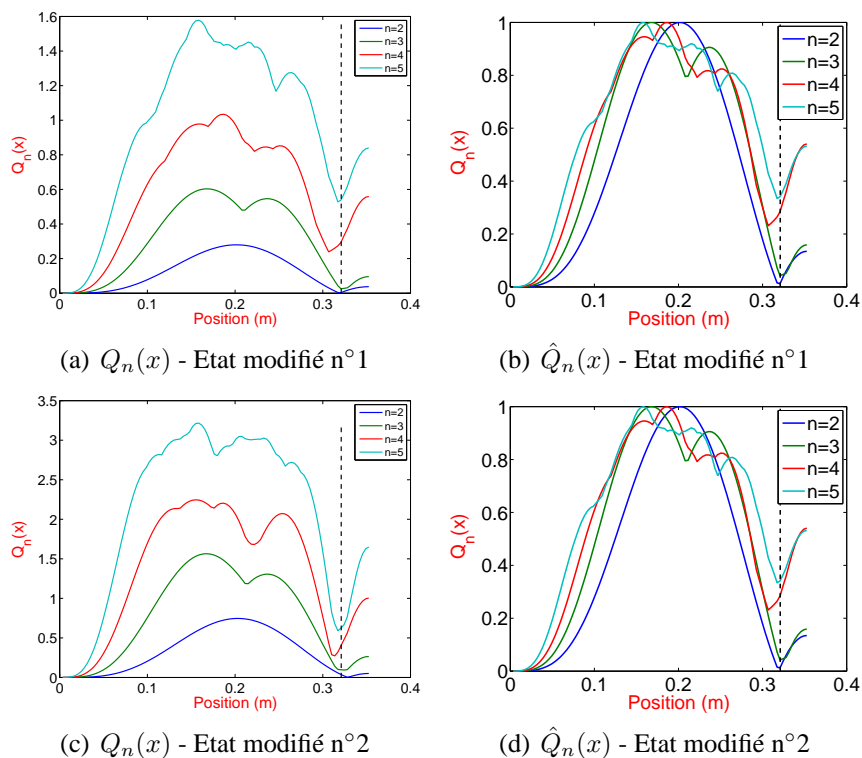


FIGURE 9.15 –  $Q_n(x)$  et  $\hat{Q}_n(x)$  pour les deux états d'ajouts de masses. Le trait noir en pointillé indique la position réelle de la masse.

Sur la figure 9.15, nous représentons les fonctions  $Q_n$  et  $\hat{Q}_n$  pour lesquelles la position de la valeur minimale correspond à une modification de masse. Comme le problème est symétrique, nous les

Mode	Poutre intacte	Trou D=10mm	1 <sup>er</sup> ajout	2 <sup>ème</sup> ajout	3 <sup>ème</sup> ajout
	$f_n$	$\tilde{f}_n$	$\tilde{f}_n$	$\tilde{f}_n$	$\tilde{f}_n$
$n^\circ 1$	74.56	76.05	74.66	74.46	74.15
$n^\circ 2$	205.91	207.91	207.39	207.33	207.31
$n^\circ 3$	403.64	405.49	402.43	401.70	400.86
$n^\circ 4$	678.82	681.68	678.13	676.73	675.90
$n^\circ 5$	1006.60	1008.40	1006.91	1004.74	1003.38

**TABEAU 9.5 – Fréquences expérimentales de la poutre E-E intacte, avec le trou de 10mm de diamètre et les 3 ajouts de masse**

Mode	Etat de référence	Etat modifié $n^{\circ} 1$		Etat modifié $n^{\circ} 2$	
	$f_n$	$\tilde{f}_n$	$\frac{\Delta f_n}{f_n}(\%)$	$\tilde{f}_n$	$\frac{\Delta f_n}{f_n}(\%)$
$n^{\circ} 1$	74.667	74.46	-0.259	74.15	-0.674
$n^{\circ} 2$	207.39	207.33	-0.030	207.31	-0.039
$n^{\circ} 3$	402.43	401.70	-0.181	400.86	-0.390
$n^{\circ} 4$	678.13	676.73	-0.206	675.90	-0.329
$n^{\circ} 5$	1006.91	1004.74	-0.216	1003.38	-0.351

**TABEAU 9.6 – Variations relatives des fréquences par rapport à l'état de référence.**

avons tracé seulement sur la moitié de la longueur de la poutre. On voit qu'à partir de 3 modes, le minimum se trouve à  $x_m = 318mm$ , proche de la position réelle de la masse ajoutée progressivement ( $x_0 = 321mm$ ). La localisation est donc plutôt précise.

Les graphes de la figure 9.15 montrent également que l'utilisation des deux premières fréquences seulement n'est pas suffisant pour localiser avec précision l'ajout de masse.

Nous nous intéressons maintenant à quantifier ces ajouts de masse en calculant  $\frac{\Delta\mu\Delta L}{\mu L}$ . La position de l'endommagement connue, à partir de l'expression (9.6) de  $\frac{\Delta f_n}{f_n}$ , il est possible de résoudre le problème suivant :

$$\begin{pmatrix} -H_1(x_0) \\ -H_2(x_0) \\ \vdots \\ \vdots \\ -H_n(x_0) \end{pmatrix} \times \left( \frac{\Delta\mu\Delta L}{\mu L} \right) = \begin{pmatrix} \Delta f_1/f_1 \\ \Delta f_2/f_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \Delta f_n/f_n \end{pmatrix}$$

où  $n$  est le nombre de modes étudiés.

Ceci consiste simplement à résoudre un système de  $n$  équations linéaires à une inconnue qui est  $\frac{\Delta\mu\Delta L}{\mu L}$  au sens des moindres carrés.

Le tableau 9.7 reporte les valeurs de variation de masse et de rigidité estimées par l'expression de la variation relative des fréquences et les valeurs réelles. On remarque que les valeurs sont assez proches.



Ajout	$\left(\frac{\Delta\mu\Delta L}{\mu L}\right)^{reel} (\%)$	$\left(\frac{\Delta\mu\Delta L}{\mu L}\right)^{estimee} (\%)$
n°1	0.31	0.27
n°2	0.62	0.60

TABLEAU 9.7 – Variation de masse estimées et réelles pour une modification autour de  $x_0 = 0.321m$ 

### 9.3 Conclusion

Nous avons appliqué dans ce chapitre, sur des données expérimentales les deux nouvelles méthodes développées dans l'équipe dynamique. Avec 50 essais, pour l'état sain et pour l'état endommagé choisis au préalable, la SVD a permis de détecter la présence d'une modification par une discontinuité dans les vecteurs singuliers à gauche et de la localiser à partir des vecteurs singuliers à droite. Pour la méthode de localisation fondée sur la variation relative des fréquences, les résultats ne sont pas concluants pour la détection et la localisation du trou. Cette méthode utilise l'estimation au premier ordre de la variation des fréquences en fonction des changements  $\Delta EI(x)$  et  $\Delta\mu(x)$ . Les approximations trop grossières du comportement ou des conditions aux limites (infiniment rigides) dans le modèle analytique ou numérique de la poutre forment une source importante d'erreurs, puisque les encastresments réels ne sont jamais parfaits. Par ailleurs, l'estimation de la variation relative avec la présence en compte de la tension due à une variation des conditions d'encastresments durant les essais, n'a pas non plus permis la localisation du trou. La méthode fondée sur les variations relatives des fréquences propres n'a donc pas permis de localiser correctement le trou ni de quantifier les modifications de masse et de raideur. Plusieurs paramètres ont été testés numériquement pour tenter d'expliquer les résultats obtenus, comme la largeur du défaut, la tension dans la poutre et l'ajout de bruit sur les fréquences. Jusqu'à présent, aucune d'entre elles ne s'est relevée concluante. Cependant, pour le cas d'une masse ajoutée les résultats sont assez satisfaisants du fait des variations relatives de fréquences élevées entre l'état de référence et l'état modifié.

# Bibliographie

- [1] Le T.T.H., *Contribution à la détection et à la localisation d'endommagements par des méthodes d'analyse dynamique des modifications structurales d'une poutre avec tension - Application au suivi des câbles du génie civil*, Thèse, ENPC, 2014.
- [2] Argoul P., Point N., Cumunel G., T.T.H. Le, Elias R., *Changes in modal properties of a beam with structural modifications*, 19<sup>ème</sup> Colloque, Vibration Shocks and Noise, 2014.
- [3] Argoul P., Point N., Cumunel G., T.T.H. Le, *Detection of structural modifications of an euler-bernoulli beam through modal parameters variation*, 7<sup>th</sup> European Workshop on Structural Health Monitoring, 2014.

# Conclusions et Perspectives

Le travail de thèse effectué s'inscrit dans une démarche de choix du type de capteur optimal suivant la méthode de détection d'endommagements retenue pour la surveillance de santé des structures. L'étude présentée porte plus particulièrement sur l'analyse des paramètres modaux pour la détection d'endommagements appliquées cas des poutres.

Diverses études numériques ont donc été réalisées afin d'évaluer les capacités des méthodes de détection d'endommagements en fonction du type du capteur utilisé pour la mesure des vibrations comme les capteurs ponctuels (par exemple des accéléromètres), les jauges ponctuelles et les extensomètres longue base (ELB). Une poutre bi-encastree a été choisie comme cas d'application. Ce type de poutre permettra d'éviter les non-linéarités qui peuvent provenir des valeurs de flèches importantes. La poutre est modélisée numériquement par EF avec les hypothèses d'Euler-Bernoulli. Une analyse de sensibilité a été réalisée et nous a permis de mieux appréhender l'influence de certains paramètres sur la performance des résultats.

Nous avons observé numériquement que les résultats de détection et de localisation obtenus par les ELB, surtout pour les méthodes utilisant la courbure modale, sont plus fiables que ceux obtenus par des capteurs ponctuels. Les ELB permettent d'obtenir directement des intégrales des courbures modales alors que l'approximation de la différence finie centrée, permettant d'obtenir la courbure modale à partir des déformées modales obtenues par des capteurs ponctuels, amplifie les erreurs et perturbe ainsi les résultats. Par ailleurs, nous avons démontré que l'ajout de bruit numérique sur les déformées modales propres influence énormément les résultats des méthodes de détection. Ensuite, l'étude de la sensibilité de quelques méthodes de détection par rapport au nombre de points de mesure, qui est un paramètre assez important afin d'obtenir une bonne représentation de la structure, nous a permis d'évaluer la capacité des techniques lorsqu'un faible nombre de capteurs est utilisé. La fiabilité des méthodes a également été évaluée par la détermination des probabilités de détection, permettant de conclure que les capteurs extensométriques ont une probabilité plus élevée à détecter et localiser un endommagement lorsque les paramètres modaux sont bruités et que le défaut est de faible dimension.

Ensuite, deux nouvelles méthodes de détection développées dans l'équipe Dynamique du Laboratoire Navier ont été présentées : la première fondée sur la SVD (Décomposition en Valeurs Singulières) et la seconde fondée sur les variations relatives des fréquences propres. Nous les avons tout d'abord appliquées sur des données numériques. Nous avons trouvé que les vecteurs droits issus de l'application de la SVD sur une collection de paramètres modaux détectent le défaut par l'apparition d'une

discontinuité à l'instant où apparaît l'endommagement. A l'aide des vecteurs gauches issus de l'application de la SVD sur une collection de courbures modales déterminés pour l'état de référence (ou sain) et un état modifié (ou endommagé), la localisation du défaut est obtenue avec une bonne précision contrairement aux déformées modales. Nous avons démontré d'autre part que l'utilisation de paramètres modaux ayant une dispersion importante nécessite la réalisation d'un nombre d'essais élevé afin de détecter un endommagement dans une structure. Donc le nombre d'essais pour chaque état a une influence importante. Dans sa thèse, T.T.H. Le a appliquée la technique en supposant un nombre d'essais élevé et en considérant une perturbation sur la tension de la poutre ou du câble alors que dans ce mémoire nous avons étudié l'effet de la dispersion présente sur les paramètres modaux. Par ailleurs, la méthode fondée sur les variations relatives des fréquences entre deux états, sain et modifié, estimée à partir des modifications de masse, de raideur et de tension, a prouvé son efficacité sur le modèle numérique de la poutre E-E entaillée. Nous avons, dans notre étude, pris en compte la tension en la considérant comme inconnue ce qui n'était pas le cas dans la thèse de T.T.H. Le, dans laquelle elle a calculé la différence entre la variation relative totale de la fréquence et la variation relative de la fréquence due à la variation de la tension. Nous avons également réussi à localiser et évaluer la sévérité de l'endommagement et nous avons pu également quantifier les modifications que la poutre (soumise ou non à une tension) a subies.

D'un point de vue expérimental, les méthodes de détection et de localisation d'endommagement appliquées numériquement ont été mises en œuvre sur une poutre en aluminium encastree-encastree trouee, en cinq niveaux de sévérité et instrumentée par onze accéléromètres, dix jauges longue base (JLB), onze jauges ponctuelles (JP), ainsi qu'une caméra rapide. La répétabilité des paramètres modaux sur les essais a été étudiée afin d'évaluer leurs changements sur un même état de la poutre et une dispersion importante a été observée compliquant la détection du défaut. Les méthodes fondées sur la courbure modale ont permis de détecter et localiser le défaut à partir des JLB pour quelques états seulement. Nous avons trouvé que certains modes perturbent la détection et la localisation et que d'autres sont plus sensibles à l'endommagement. Le nombre de capteurs limité disponible est cependant un paramètre essentiel qui a beaucoup d'influence sur la qualité des résultats. En effet, le nombre optimal de capteurs suggéré dans la littérature afin de pouvoir visualiser les trois premières déformées modales représentatives de la structure est  $n_{opt} = 15$ . Par ailleurs, nous avons démontré que la SVD, appliquée sur une collection de paramètres modaux issues des accéléromètres et des jauges longue base, a permis de détecter le défaut, mais au niveau de la localisation, les JLB ont fourni une meilleure précision que les accéléromètres. La sensibilité de la technique réside dans la dispersion de la série de fréquences propres et/ou de déformées modales choisies. Pour la méthode fondée sur les variations relatives des fréquences, nous n'avons pas pu localiser le trou dans la poutre E-E. Nous recherchons encore la cause et des études ultérieures à cette thèse sont envisagées. Cependant, la technique a fourni des résultats probants lorsqu'une masse localisée a été ajoutée sur la même poutre sans doute du fait que les variations de fréquences étaient suffisamment conséquentes.

Nous avons également identifié le déplacement temporel de la poutre par la corrélation d'images et

nous avons identifié les paramètres modaux de la poutre saine et endommagée pour quelques essais. Pour la détection d'endommagement à partir de quelques méthodes, nous n'avons pas pu détecter et localiser correctement le trou par les méthodes courbure modale et la courbure de flexibilité, alors que la méthode de l'énergie de déformation donnent de meilleurs résultats. Ceci provenient très probablement du bruit présent dans les images.

Le travail de ce mémoire a permis d'obtenir des résultats concluants et ouvre un certain nombre de perspectives à explorer. Du point de vue des calculs numériques, les méthodes de placement optimal des capteurs ponctuels permettent d'envisager l'adaptation des algorithmes pour les capteurs extensométriques afin d'optimiser la détection et la localisation des défauts.

Au vu des résultats obtenus au chapitre 5, un étude de sensibilité plus poussée des paramètres influençant les résultats de l'application de la SVD, comme le bruit de mesure ajouté sur les paramètres modaux, le nombre d'essais ainsi que le type et le nombre de capteurs utilisés, est envisagée. Quant à la méthode fondée sur la variation relative des fréquences, il serait intéressant de parvenir à déterminer, par des simulations numériques, la sensibilité de la technique à localiser un endommagement en fonction de différents paramètres : la taille du défaut, le bruit ajouté sur les fréquences, la position du défaut etc.

Concernant les perspectives expérimentales, il serait intéressant de tester les méthodes de détection d'endommagement sur une poutre en béton instrumentée par un nombre de capteurs plus élevé. Quant au type de capteur à utiliser, l'utilisation de patchs piézoélectriques sur une poutre en aluminium sera intéressant à envisager car leur rapport signal sur bruit est de loin supérieur à celui des jauges. Ils devraient donc permettre d'améliorer les résultats obtenus par les JLB. Pour la méthode fondée sur la variation relative des fréquences, peu de temps a été consacré à la compréhension des résultats obtenus pour la poutre en aluminium E-E, ce qui laisse envisager des perspectives afin de mieux appréhender les conditions d'application de la technique. Pour la corrélation d'images, le laboratoire est en attente de deux caméras de performance plus élevée. Il serait ainsi intéressant de les tester sur la poutre afin de détecter et localiser les endommagements.

# **Annexes**

## Annexe A

# Réponse impulsionnelle d'une poutre instrumentée par différents types de capteurs

Les calculs menés portent sur l'étude linéaire des vibrations de flexion transverse d'une poutre dans le plan  $(O, x, y)$  avec les hypothèses cinématiques d'Euler-Bernoulli. La poutre est supposée homogène de section constante rectangle  $S = b \times h$ , de longueur  $L$  et excitée par une force  $g(x, t)$  appliquée à l'abscisse  $x_j$  et à l'instant  $t_0$ .

### A.0.1 Capteurs ponctuels : déplacement, vitesse, accélération

La réponse à un choc suivant la direction  $j$  pour le déplacement transverse de la poutre, lorsque seuls les  $N$  premiers modes sont pris en compte, est donnée classiquement par superposition modale (cas linéaire) [1] :

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t) \phi_k(x) \quad (\text{A.1})$$

où  $b_k(t)$  et  $\phi_k(x)$  sont respectivement la réponse à la force  $g(x, t)$  et les déformées modales de la poutre. La force appliquée à la poutre est définie par :  $g(x, t) = F \cdot \delta_t^{t_0} \cdot \delta_x^{x_0}$  où  $\delta$  représente la distribution de Dirac égal à 1 pour  $x = x_0, t = t_0$  et 0 sinon.

L'expression de la réponse  $b_k(t)$  à la force  $g(x, t)$  est l'intégrale de Duhamel :

$$b_k(t) = \frac{1}{\rho S \tilde{\omega}_k} \int_0^t F_k(\tau) e^{-\xi_k \tilde{\omega}_k (t-\tau)} \cdot \sin(\omega_k (t-\tau)) d\tau. \quad (\text{A.2})$$

où  $F_k(t) = \int_0^L g(x, t) \phi_k(x) dx$ ,  $\tilde{\omega}_k = \omega_k \sqrt{1 - \xi_k^2}$  et  $\omega_k = \frac{(\beta_k L)^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$

$\beta_k L$  est une solution de l'équation correspondant aux CL étudiées :

–  $\cos(\beta_k L) \cdot \cos(\beta_k L) = 1$  (poutre L-L et E-E).

- $\cos(\beta_k L) \cdot \cos(\beta_k L) = -1$  (poutre L-L et E-E).
- $\sin(\beta_k L) = 0$  soit  $\beta_k L = k\pi$  (poutre L-L et E-E).

Il vient alors :

$$b_k(t) = \frac{F\phi_k(x_0)}{\rho S\omega_k} \cdot \sin(\tilde{\omega}_k(t - t_0))e^{-\Xi_k\omega_k(t-t_0)} \quad (\text{A.3})$$

Les expressions des déformées modales pour les différentes CL sont [2] :

– L-L

$$\phi_k = \frac{\alpha_k}{\sqrt{\rho SL}} \left[ \frac{\cos(\beta_k L) - \cosh(\beta_k L)}{\sinh(\beta_k L) - \sin(\beta_k L)} (\sinh(\beta_k x) + \sin(\beta_k x)) + \cosh(\beta_k x) + \cos(\beta_k x) \right] \quad (\text{A.4})$$

– E-E

$$\phi_k = \frac{\alpha_k}{\sqrt{\rho SL}} \left[ \frac{\cos(\beta_k L) - \cosh(\beta_k L)}{\sinh(\beta_k L) - \sin(\beta_k L)} (\sinh(\beta_k x) - \sin(\beta_k x)) + \cosh(\beta_k x) - \cos(\beta_k x) \right] \quad (\text{A.5})$$

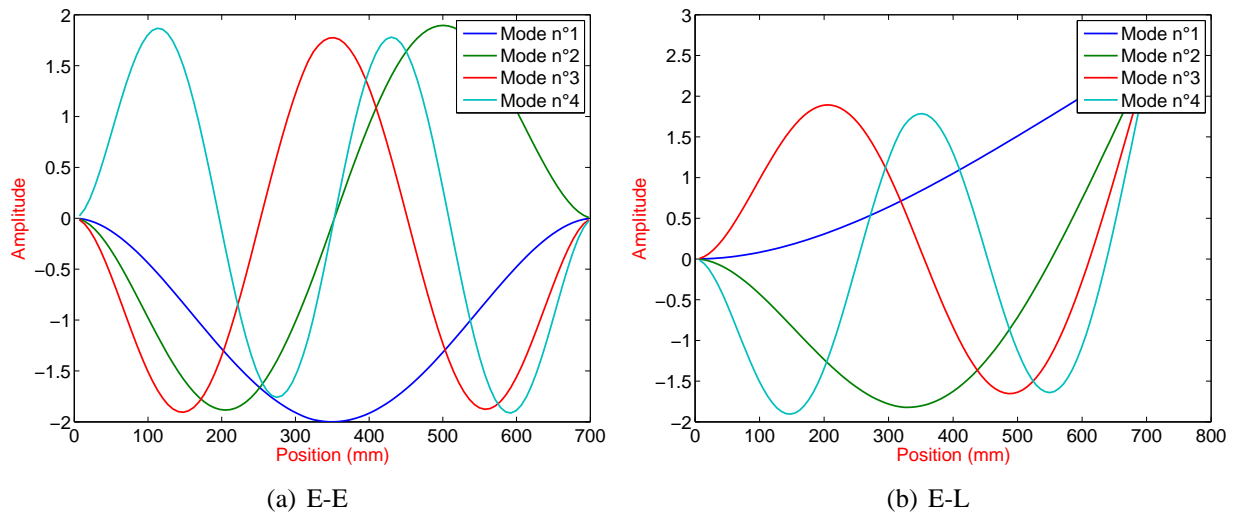
– A-A

$$\phi_k = \sqrt{\frac{1}{\rho SL}} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \quad (\text{A.6})$$

– E-L

$$\phi_k = \frac{\alpha_k}{\sqrt{\rho SL}} \left[ \frac{\cos(\beta_k L) + \cosh(\beta_k L)}{\sinh(\beta_k L) + \sin(\beta_k L)} (\sin(\beta_k x) - \sinh(\beta_k x)) + \cosh(\beta_k x) - \cos(\beta_k x) \right] \quad (\text{A.7})$$

Sur la figure A.1, les quatre premières déformées modales de la poutre ont été tracées pour deux CL : E-E et E-L.



**FIGURE A.1 – Graphes des quatre premières déformées modales normalisées de la poutre ( $\phi_k$ ) pour les CL : E-E et E-L.**



où  $\alpha_k$  est introduit pour normaliser les déformées modales par rapport à la masse :

$$\int_0^L \rho S \phi_i(x) \phi_j(x) dx = \delta_i^j \quad (\text{A.8})$$

avec  $\delta_{ij}$  le symbole de Kronecker,  $\delta_{ij} = 1$  si  $i = j$ , et 0 sinon.

### A.0.2 Capteur longue base : ELB ou JLB

L'analyse modale est une théorie basée sur la linéarité des systèmes. Pour la poutre, le domaine linéaire est celui des petites déformations et des petites rotations. Dans ce cas, la mesure obtenue par une JLB est définie par :

$$\Delta L(a, b, t) = -y \int_a^b \nu''(x, t) dx \quad (\text{A.9})$$

Il vient donc :

$$\Delta L(a, b, t) = -y \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t) \left( \int_a^b \frac{\partial^2 \phi_k(x)}{\partial x^2} dx \right) \quad (\text{A.10})$$

d'où

$$\boxed{\Delta L(a, b, t) = -y \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t) \Psi_k(a, b)} \quad (\text{A.11})$$

avec  $\Psi_k(a, b) = \int_a^b \phi_k''(x) dx = \phi_k'(b) - \phi_k'(a)$  et  $b_k(t)$  la réponse temporelle du  $k^{\text{ème}}$  mode.

On introduit souvent la courbure moyenne en statique [2][3]. Pour la dynamique, nous obtenons une courbure moyenne modale  $\Gamma_{\text{moy}}^k$  définie par :

$$\Gamma_{\text{moy}}^k = \frac{1}{b-a} \int_a^b \phi_k''(x, t) dx \quad (\text{A.12})$$

Alors la mesure de la JLB devient :

$$\Delta L(a, b, t) \approx -y(b-a) \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t) \Gamma_{\text{moy}}^k(a, b) \quad (\text{A.13})$$

Cette formule liant la mesure de la JLB à la courbure modale a motivé plusieurs équipes à travailler sur les méthodes de détection d'endommagments et notamment celle basée sur la courbure modale. Les expressions des dérivées première et seconde des déformées modales de la poutre pour les différentes CL sont :

– L-L

$$\phi_k'(x) = \frac{\alpha_k \beta_k}{\sqrt{\rho S L}} \left[ \frac{\cos(\beta_k L) - \cosh(\beta_k L)}{\sinh(\beta_k L) - \sin(\beta_k L)} (\cosh(\beta_k x) + \cos(\beta_k x)) + \sinh(\beta_k x) - \sin(\beta_k x) \right] \quad (\text{A.14})$$

---


$$\phi_k''(x) = \frac{\alpha_k \beta_k^2}{\sqrt{\rho SL}} \left[ \frac{\cos(\beta_k L) - \cosh(\beta_k L)}{\sinh(\beta_k L) - \sin(\beta_k L)} (\sinh(\beta_k x) - \sin(\beta_k x)) + \cosh(\beta_k x) - \cos(\beta_k x) \right] \quad (\text{A.15})$$

– E-E

$$\phi_k'(x) = \frac{\alpha_k \beta_k}{\sqrt{\rho SL}} \left[ \frac{\cos(\beta_k L) - \cosh(\beta_k L)}{\sinh(\beta_k L) - \sin(\beta_k L)} (\cosh(\beta_k x) - \cos(\beta_k x)) + \sinh(\beta_k x) + \sin(\beta_k x) \right] \quad (\text{A.16})$$

$$\phi_k''(x) = \frac{\alpha_k \beta_k^2}{\sqrt{\rho SL}} \left[ \frac{\cos(\beta_k L) - \cosh(\beta_k L)}{\sinh(\beta_k L) - \sin(\beta_k L)} (\sinh(\beta_k x) + \sin(\beta_k x)) + \cosh(\beta_k x) + \cos(\beta_k x) \right] \quad (\text{A.17})$$

– A-A

$$\phi_k'(x) = \sqrt{\frac{1}{\rho SL}} \left( \frac{k\pi x}{L} \right) \cos \left( \frac{k\pi x}{L} \right) \quad (\text{A.18})$$

$$\phi_k''(x) = -\sqrt{\frac{1}{\rho SL}} \left( \frac{k\pi x}{L} \right)^2 \sin \left( \frac{k\pi x}{L} \right) \quad (\text{A.19})$$

– E-L

$$\phi_k'(x) = \frac{\alpha_k \beta_k}{\sqrt{\rho SL}} \left[ \frac{\cos(\beta_k L) + \cosh(\beta_k L)}{\sinh(\beta_k L) + \sin(\beta_k L)} (\cos(\beta_k x) - \cosh(\beta_k x)) + \sinh(\beta_k x) + \sin(\beta_k x) \right] \quad (\text{A.20})$$

$$\phi_k''(x) = \frac{\alpha_k \beta_k^2}{\sqrt{\rho SL}} \left[ \frac{\cos(\beta_k L) + \cosh(\beta_k L)}{\sinh(\beta_k L) + \sin(\beta_k L)} (\sinh(\beta_k x) + \sin(\beta_k x)) + \cosh(\beta_k x) + \cos(\beta_k x) \right] \quad (\text{A.21})$$

L'équation A.11 montre que les paramètres modaux obtenus à partir des JLB ou ELB ne sont pas identiques à ceux déterminés par les capteurs ponctuels classiques (déplacement, vitesse ou accélération). En effet, les fréquences propres et amortissements modaux sont les mêmes, le facteur temporel  $b_k(t)$  étant identique à celui du déplacement  $\nu(x, t)$  défini par l'équation A.2, par contre les déformées modales associées à ces fréquences propres sont différentes. Pour les capteurs ponctuels, les déformées modales sont les  $\phi_k(x)$  alors que pour les JLB, les déformées modales identifiées  $\Psi_k(x)$  sont définies par :

$$\boxed{\Psi_k = \int_a^b \phi_k''(x) dx = \phi_k'(b) - \phi_k'(a)} \quad (\text{A.22})$$

Les  $\phi_k''(x)$  sont généralement appelés courbures modales et pour les  $\phi_k'(x)$  nous parlerons de déformées « angulaires » modales. Les déformées modales observées par les JLB sont donc des intégrales de courbure modale entre les bornes du capteur.

## Notions de nœuds et de ventres des déformées modales pour les JLB

Dans ce paragraphe, nous allons mettre en avant les particularités des JLB quant aux notions de nœuds et de ventres des déformées modales  $\Psi_k(x)$  observées par ces dernières. Elles sont différentes de ce que l'on obtient classiquement pour des capteurs ponctuels et permettent d'envisager des perspectives intéressantes quant au placement optimal des JLB et au filtrage de modes [4]. Si les JLB étaient ponctuelles, la contribution de la déformée modale dans la réponse du capteur serait la courbure modale en un point, les nœuds seraient alors, par définition, les abscisses où les courbures modales s'annulent. Cependant, la particularité des JLB est qu'elles possèdent une base de mesure d'une certaine longueur. La variation de la valeur de la déformée angulaire choisie ( $\phi' = \text{cst}$ ) induit un nombre de configurations possibles très important. Ce n'est pas du tout le cas pour les capteurs ponctuels, où il n'y a que quelques nœuds par mode et dont le nombre augmente avec l'ordre du mode.

### – Nœuds d'un mode

La notion de nœuds pour les JLB se comprend à partir de l'expression  $\Psi_k = \phi'_k(b) - \phi'_k(a)$  avec  $a$  et  $b$  les bornes de la JLB. En effet, il suffit de choisir le positionnement et la longueur de la JLB de telle manière que cette différence s'annule, autrement dit de choisir deux points tel que  $\phi'_k(b) = \phi'_k(a)$ .

### – Ventre d'un mode

Pour la notion de ventre, le raisonnement est semblable. Pour les capteurs ponctuels, les ventres sont les maxima des déformées modales. Si un capteur ponctuel est placé au ventre d'un mode, la contribution de la déformée modale sera maximale pour le capteur. Ceci se traduira par une amplitude du pic associé au mode 1 plus importante au niveau de la TF du signal du capteur.

Pour une déformée modale observé par la JLB, un ventre sera défini par une configuration de la JLB permettant d'obtenir la contribution maximale du vecteur propre au niveau du capteur (le facteur temporel étant le même pour toutes les configurations de JLB possibles). Il faut donc que  $\Psi_k$  soit maximum, c'est-à-dire que l'intégrale de la courbure modale soit maximale.

Ces notions sont détaillées dans la thèse de G.Cumunel [8].

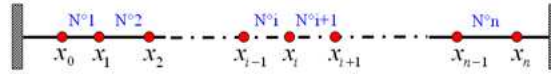
## A.0.3 Obtention des déformées modales à partir des JLB

Par analyse modale, la JLB  $n^{\circ}i$  permettra d'obtenir les quantités  $\phi'_k(x_i) - \phi'_k(x_i - 1)$ . Pour les capteurs ayant une extrémité en commun, la somme des résultats obtenus pour la déformée modale de deux capteurs voisins va être égale au résultat obtenu avec une seule JLB équivalent, dont la longueur serait égale à la somme des longueurs des deux capteurs :

$$JLBn^{\circ}i + JLBn^{\circ}i + 1 \longrightarrow JLB$$

$$\phi'_k(x_i) - \phi'_k(x_i - 1) + \phi'_k(x_i + 1) - \phi_k(x_i) \rightarrow \phi'_k(x_i + 1) - \phi'_k(x_i - 1) \quad (\text{A.23})$$

Ainsi, pour chaque JLB, si la somme des valeurs des déformé modales obtenues pour le capteur et tous les capteurs précédents est effectuée, il est possible de remonter aux  $\phi'_k(x)$  discrétisés aux bornes des JLB à une constante additive près.



**FIGURE A.2 – Placement de JLB en continu sur la poutre E-E.**

En interpolant les  $\phi'_k(x_i)$  à l'aide de splines d'ordre 5 et en intégrant ensuite, il est possible de remonter aux déformées modales.

G.Cumunel [4] a explicité dans sa thèse les mesures pour le cas des ELB sur une poutre bi-encastée

# Bibliographie

- [1] G radin M., Rixen D., *Théorie des vibrations : Application à la dynamique des structures*, Masson, 1996.
- [2] Vurpillot S., Krueger G., Benouaich D., Clément D., Inaudi D., *Vertical deflection of a prestressed concrete bridge obtained using deformation sensors and inclinometer measurements*, ACI Structural Journal, 95(5) 518-526, 1998.
- [3] Vurpillot S., *Analyse automatisée des systèmes de mesure de déformation pour l'auscultation des structures*, Thèse, EPFL Lausanne, 1999.
- [4] Cumunel G., *Extensomètres à fibre optique Longue Base (ELB) pour l'évaluation dynamique des structures*, Thèse de doctorat,  cole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, France , 2008.

# Annexe B

## Simulation de Monte-Carlo

La méthode de Monte-Carlo est une technique de simulation puissante qui est utilisée pour évaluer le risque ou la fiabilité de systèmes complexes d'ingénierie. Cette méthode peut-être utilisée avec des connaissances basiques de probabilité et de statistique. La technique de simulation est divisée essentiellement en 6 parties :

1. Définition du problème en termes de variables aléatoires.
2. Quantification des caractéristiques probabilistes de toutes les variables aléatoires, c'est-à-dire leur fonction de densité de probabilité, leur moyenne, leur écart type, etc.
3. Génération des valeurs aléatoires de ces variables.
4. Evaluation du problème déterministe pour chaque ensemble de réalisations ou tirages de toutes les variables aléatoires.
5. Obtention de l'information probabiliste de N réalisations, c'est-à-dire évaluer la probabilité de faille, déterminer la moyenne et l'écart type des variables de sortie du problème.
6. Déterminer l'efficience et la stabilité de la simulation.

### Génération des nombres aléatoires

La génération des nombres aléatoires en suivant une fonction de distribution de probabilité spécifique est le cœur de la méthode de Monte-Carlo. En général, tous les logiciels de statistique modernes sont capables de générer un échantillon de nombres aléatoires entre 0 et 1 suivant une loi de distribution uniforme  $U[0, 1]$ . A partir de cet échantillon, on peut en obtenir un autre qui suit la fonction de densité de probabilité (fdp) que l'on souhaite à l'aide des transformations pertinentes. La méthode de transformation est connue sous le nom de *technique de transformation inverse ou méthode FCD inverse*. Dans cette méthode si l'on veut transformer une densité  $u_i$  entre 0 et 1, on égalise la fonction de densité cumulée  $F_X(x_i)$  souhaitée au numéro  $u_i$  généré :

$$f_X(x) = F_X^{-1} F_U[f_U(u)] \quad (\text{B.1})$$

$$F_U(u_i) = u_i \text{ pour } U[0, 1] \quad (\text{B.2})$$

$$F_X(x_i) = F_U(u_i) = u_i \quad (\text{B.3})$$

$$x_i = F_X^{-1}(u_i) \quad (\text{B.4})$$

$$(\text{B.5})$$

### Distribution log-normale

Cette distribution de probabilité est souvent utilisée lorsque la variable aléatoire ne peut pas avoir de valeurs négatives. Si une variable  $S$  suit une loi log-normale, le logarithme naturel de cette variable suit une loi normale. La fonction de distribution de probabilité  $f_{dp}$  et la fonction cumulative  $FCD$  sont :

$$f_S(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\zeta_s \cdot s} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\ln s - \lambda_s}{\zeta_s} \right)^2 \right] \quad (\text{B.6})$$

$$F_S(s) = \int_0^{(\frac{\ln s - \lambda_s}{\zeta_s})} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\ln s - \lambda_s}{\zeta_s} \right)^2 \right] ds \quad (\text{B.7})$$

avec

$$\lambda_s = \ln(\mu_s) - \frac{1}{2}\zeta_s^2$$

$$\zeta_s^2 = \ln \left[ 1 + \left( \frac{\sigma_s}{\mu_s} \right)^2 \right]$$

D'où la valeur de  $x_i$  est égale à :

$$u_i = \Phi \left( \frac{\ln(x_i) - \lambda_X}{\zeta_X} \right) \quad (\text{B.8})$$

$$x_i = \exp [\lambda_X + \zeta_X \cdot \Phi^{-1}(u_i)] \quad (\text{B.9})$$

### Probabilité de ruine

Afin de définir la probabilité de faillite ou de ruine d'un problème, on doit résoudre l'équation suivante :

$$p_f = \int_{g(X) \leq 0} f(X) \cdot dX \quad (\text{B.10})$$

# Bibliographie

- [1] Lopez-Caballero F., *Probabilité et méthodes de fiabilité utilisées en géotechnique*



# Annexe C

## Transformées en Ondelettes Continues

Dans cette annexe, nous présentons la méthode d'analyse modale en output-only utilisant la Transformation en Ondelettes Continues (TOC) présentée dans [1]. Elle permet d'effectuer l'analyse dans le plan temps-fréquence de réponses linéaires ou non-linéaires de signaux de mesure, qui peuvent être des déplacements, des vitesses ou des accélérations.

### C.1 Application aux signaux modulés en fréquence

#### C.1.1 Base théorique

Soit une fonction  $\psi(t)$  bien localisée en temps et en fréquence.  $\psi(\cdot)$  est la fonction analysante de carré intégrable et continue par morceaux, appelée ondelette «mère». On lui associe une famille d'ondelettes  $\psi_{(b,a)}(t)$  engendrée par des dilatations et translations de  $\psi(t)$  :

$$\psi_{(b,a)}(t) = \frac{1}{a} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (\text{C.1})$$

où  $a$  et  $b$  sont des paramètres relatifs respectivement à l'échelle (inverse de fréquence) et au temps.

Les ondelettes sont donc de forme constante mais de taille variable proportionnelle au paramètre de dilatation  $a$ . Soit le signal  $u(t)$  d'énergie finie et continu par morceaux, la transformation en ondelettes de ce signal est donné par le produit de convolution

$$T_\psi[u](b, a) = \langle u, \psi_{(b,a)}(t) \rangle = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \bar{\psi}\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad (\text{C.2})$$

Si le théorème de Parseval est appliqué à cette équation, l'expression de la transformation en ondelettes du signal  $u(t)$  dans le domaine fréquentiel est alors

$$T_\psi[u](b, a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(\omega) \bar{\hat{\psi}}(a\omega) e^{i\omega b} d\omega \quad (\text{C.3})$$

La fonction  $\psi(t)$  est une ondelette «mère» admissible si le coefficient  $C_\psi$  défini par

$$C_\psi = \int_0^{+\infty} |\hat{\psi}(a\omega)|^2 \frac{da}{a} \quad (\text{C.4})$$

est fini, non nul et indépendant de  $\omega$  réel. Cette condition implique que  $\hat{\psi}(\omega)$  définie par  $\hat{\psi}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) e^{-i\omega t} dt$  est égale à zéro à l'origine. Cela signifie que  $\psi(t)$  doit nécessairement posséder certaines oscillations.

Une fois cette condition d'admissibilité vérifiée, le signal  $u(t)$  peut être reconstruit par

$$u(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} T_\psi[u](b, a) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \frac{da}{a} db \quad (\text{C.5})$$

La résolution locale de la TOC en temps et en fréquence autour du point du plan temps-fréquence défini par

$$\begin{cases} t &= b + at_\psi \\ \omega &= \frac{\omega_\psi}{a} \end{cases} \quad (\text{C.6})$$

dépend du paramètre de dilatation  $a$  et est déterminée, respectivement par la durée  $\Delta t_\psi$  et la largeur de bande  $\Delta\omega_\psi$  de l'ondelette mère :

$$\begin{cases} \Delta t &= a\Delta t_\psi \\ \Delta\omega &= \frac{\Delta\omega_\psi}{a} \end{cases} \quad (\text{C.7})$$

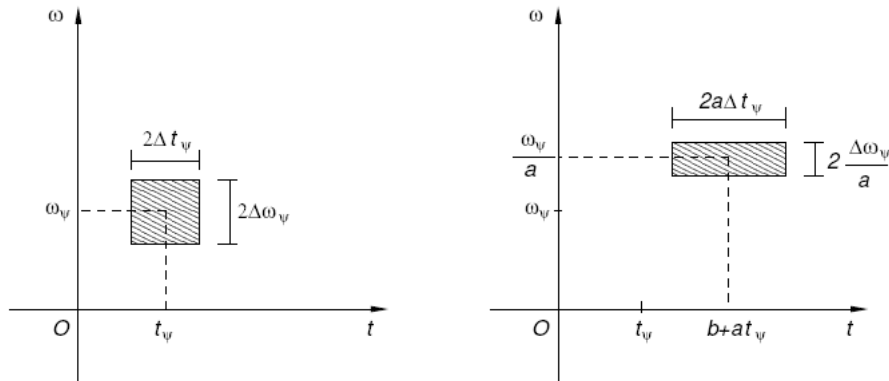


FIGURE C.1 – Localisation dans le plan temps-fréquence de : l'ondelette mère (à gauche) et la transformée en ondelettes (à droite), d'après [2].

L'incertitude est donc

$$\mu_{\psi(b,a)} = \Delta t \Delta\omega = \Delta t_\psi \Delta\omega_\psi = \mu_\psi \quad (\text{C.8})$$

( $\mu_\psi \geq \frac{1}{2}$  d'après le principe d'incertitude d'Heisenberg)

Ainsi, le domaine de localisation de la transformée en ondelettes sur le plan temps-fréquence au point

$(b + at_\psi, \omega = \frac{\omega_\psi}{a})$  (Fig. C.1) sera

$$[b + at_\psi - a\Delta t_\psi, b + at_\psi + a\Delta t_\psi] \times \left[ \frac{\omega_\psi}{a} - \frac{\Delta\omega_\psi}{a}, \frac{\omega_\psi}{a} + \frac{\Delta\omega_\psi}{a} \right] \quad (\text{C.9})$$

En se référant à l'analyse fréquentielle, l'analyse en ondelettes peut être comparée à un filtre avec un facteur de qualité  $Q$ , défini comme le rapport entre le centre de fréquence et la bande de fréquence

$$Q = \frac{\omega_\psi/a}{2(\Delta\omega_\psi/a)} = \frac{\omega_\psi}{2\Delta\omega_\psi} \quad (\text{C.10})$$

Les réponses libres enregistrées sont soit des déplacements, soit des vitesses, soit des accélérations. Ces signaux de mesure sont amortis et bornés. Il est alors utile de déterminer la relation entre leurs transformées en ondelettes. Si  $\psi(t)$  et  $u(t)$  sont continues et différentiables par morceaux, l'intégrale par partie de la définition de la transformation en ondelettes (C.2) nous donne

$$T_\psi[\dot{u}](b, a) = \frac{1}{a} \left[ u(t)\bar{\psi}\left(\frac{t-b}{a}\right) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\dot{\bar{\psi}}\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \right] \quad (\text{C.11})$$

De plus, si  $\dot{\psi} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  et  $\dot{u} \in L^2(\mathbb{R})$ , la transformation en ondelettes de  $\dot{u}(t)$  avec l'ondelette mère  $\psi$  est reliée à la transformation en ondelettes de  $u(t)$  avec  $\dot{\psi}$  par

$$T_\psi[\dot{u}](b, a) = -\frac{1}{a} T_{\dot{\psi}}[u](b, a) \quad (\text{C.12})$$

Cette relation peut facilement être étendue aux signaux d'énergie finie  $\ddot{u}$  quand  $\ddot{\psi} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$

$$T_\psi[\ddot{u}](b, a) = -\frac{1}{a} T_{\dot{\psi}}[\dot{u}](b, a) = \frac{1}{a^2} T_{\ddot{\psi}}[u](b, a) \quad (\text{C.13})$$

Cela signifie que les transformées en ondelettes de déplacement, de vitesse, d'accélération sont reliées au moyen des ondelettes mères et de leurs dérivées au premier et au second ordre.

### C.1.2 TOC de signaux modulés en fréquence et caractérisation d'arêtes

Un signal réel  $u(t)$  d'énergie finie peut toujours être associé à un signal analytique  $Z_u(t)$  en utilisant la transformée de Hilbert

$$Z_u(t) = [I + iH]u(t) \quad (\text{C.14})$$

où  $I$  et  $H$  sont respectivement l'identité et l'opérateur de transformation de Hilbert.

Dans le domaine fréquentiel, cela donne

$$\begin{aligned} \hat{Z}_u(\omega) &= 2\Theta(\omega)\hat{u}(\omega) \\ u(t) &= \text{Re}[Z_u(t)] \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

où  $\Theta$  est la fonction de Heaviside.

On définit le couple canonique  $(A_u(t), \phi_u(t))$  du signal  $u(t)$  avec  $A_u(t) = |Z_u(t)|$  ( $A_u(t) \geq 0$ ) le module et  $\phi_u(t) = \arg(Z_u(t))$  ( $\phi_u(t) \in [0, 2\pi]$ ) la phase et on a, par conséquent,  $u(t) = A_u(t)\cos(\phi_u(t))$ . La pulsation instantanée  $\omega_u(t)$  est alors donnée par

$$\omega_u(t) = \frac{d\phi_u(t)}{dt} = \dot{\phi}_u(t) \quad (C.16)$$

Cette représentation canonique s'est avérée utile dans beaucoup d'applications. Cependant, lorsque des signaux étudiés ont plusieurs composantes, un filtre passe-bande est nécessaire pour séparer chaque composante. Quand le signal  $u(t)$  est donné sous la forme d'une unique composante

$$u(t) = A(t)\cos(\phi(t)) \quad (C.17)$$

Son signal analytique  $Z_u(t)$  n'est en général pas très différent du signal complexe associé  $A(t)e^{i\phi(t)}$  (asymptoticité).  $Z_u(t)$  peut donc être approximé par  $A(t)e^{i\phi(t)}$  :

$$Z_u(t) \approx A(t)e^{i\phi(t)} \quad (C.18)$$

et  $u(t)$  est maintenant appelé signal asymptotique s'il oscille suffisamment.

Quand l'ondelette mère admissible  $\psi(t)$  est progressive (i.e sa transformée de fourier  $\hat{\psi}(\omega)$  est nulle pour  $\omega \leq 0$ ), la TOC d'un signal  $u$  à valeurs réelles est liée à la transformée en ondelettes de son signal analytique  $Z_u(t)$

$$T_\psi[u](b, a) = \frac{1}{2}T_\psi[Z_u](b, a) \quad (C.19)$$

La caractéristique principale de la TOC appliquée aux signaux asymptotiques est qu'elle est concentrée le long de courbes du plan temps-fréquence appelées arêtes. La restriction de la transformée en ondelettes à chaque arête, appelée squelette de la transformée, contient un maximum d'information : elle est très proche de la composante même du signal. Une définition de l'arête et une approximation du squelette sont donnés par [3]

$$a_r(b) = \frac{K}{\dot{\phi}_u(b)} \quad (C.20)$$

$$T_\psi[u](b, a) \approx \text{Corr}(b)Z_u(b) \quad (C.21)$$

où  $K$  est une constante dépendant de l'ondelette mère et  $\text{Corr}(b)$  une fonction de correction entièrement caractérisée par l'ondelette mère et par l'arête  $a_r(b)$ .

Une fois que l'arête est déterminée, le signal analytique  $Z_u(t)$  peut être déduit. Ses parties réelle et imaginaire donnent respectivement le signal et sa transformée de Hilbert. L'extraction d'arête est obtenue à l'aide de méthodes non-paramétriques, pour lesquelles plusieurs algorithmes sont disponibles dans [4, 5, 6]

## C.2 Identification modale des systèmes mécaniques linéaires

### C.2.1 Réponses libres des systèmes amortis à plusieurs degrés de liberté

Considérons un système mécanique à plusieurs degrés de liberté (m.d.d.l) avec un amortissement visqueux proportionnel. Les réponses libres au point  $k$  d'un tel système à  $N$  degrés de liberté, en termes de déplacement  $u_k(t)$ , de vitesse  $\dot{u}_k(t)$  et d'accélération  $\ddot{u}_k(t)$ , sont exprimées selon la base modale

$$u_k(t) = \sum_{j=1}^N u_{kj}(t) = \sum_{j=1}^N \Phi_{kj} \rho_j e^{-\xi_j \omega_j t} \cos(\tilde{\omega}_j t - \varphi_j) \quad (\text{C.22})$$

$$\dot{u}_k(t) = \sum_{j=1}^N \dot{u}_{kj}(t) = - \sum_{j=1}^N \Phi_{kj} \rho_j \omega_j e^{-\xi_j \omega_j t} \cos(\tilde{\omega}_j t - \varphi_j - \delta_j) \quad (\text{C.23})$$

$$\ddot{u}_k(t) = \sum_{j=1}^N \ddot{u}_{kj}(t) = - \sum_{j=1}^N \Phi_{kj} \rho_j \omega_j^2 e^{-\xi_j \omega_j t} \cos(\tilde{\omega}_j t - \varphi_j + \theta_j) \quad (\text{C.24})$$

où  $j$  est l'indice du mode.  $\Phi_{kj}$  est le terme  $(k, j)$  de la matrice modale composée des vecteurs propres  $\Phi_j = [\Phi_{1j}, \Phi_{2j}, \dots, \Phi_{Nj}]^T$ .

Chacun de ces vecteurs peut être normalisé au maximum de déplacement pour lequel  $\Phi_{mj} = 1$ . Pour le mode  $j$ ,  $\tilde{\omega}_j$  et  $\omega_j$  sont respectivement les pulsations propres amorties et non amorties,  $\xi_j$  le taux d'amortissement et  $\rho_j$  est défini par

$$\rho_j = \left\{ \left[ \frac{\dot{Y}_j(0) + \xi_j \omega_j Y_j(0)}{\tilde{\omega}_j} \right]^2 + [Y_j(0)]^2 \right\}^{1/2} \quad (\text{C.25})$$

avec  $Y_j(0)$  le déplacement modal initial et  $\dot{Y}_j(0)$  la vitesse modale initiale du mode  $j$ .

Par ailleurs, nous avons

$$\begin{aligned} \varphi_j &= \arctan \left\{ (c_{j0} + \xi_j) / \sqrt{1 - \xi_j^2} \right\} \\ \delta_j &= \arctan \left\{ \sqrt{1 - \xi_j^2} / \xi_j \right\} \\ \theta_j &= \arctan \left\{ 2\xi_j \sqrt{1 - \xi_j^2} / (1 - 2\xi_j^2) \right\} \end{aligned} \quad (\text{C.26})$$

avec  $c_{j0} = \dot{Y}_j(0) / (\omega_j Y_j(0))$ .

Alors, les relations (C.22), (C.23) et (C.24) peuvent être réécrites sous la forme générale :

$$\sum_{j=1}^N A_{kj}(t) \cos(\alpha_{kj}(t))$$

où

$$\begin{cases} \alpha_{u_{kj}}(t) &= \tilde{\omega}_j t - \varphi_j + \frac{\pi}{2}(1 - \text{sgn}(\Phi_{kj})) \\ A_{u_{kj}}(t) &= |\Phi_{kj}| \rho_j e^{-\xi_j \omega_j t} \quad \text{pour } u_k(t) \end{cases} \quad (\text{C.27})$$

$$\begin{cases} \alpha_{\dot{u}_{kj}}(t) &= \tilde{\omega}_j t - \varphi_j - \delta_j + \frac{\pi}{2}(1 + \text{sgn}(\Phi_{kj})) \\ A_{\dot{u}_{kj}}(t) &= |\Phi_{kj}| \rho_j \omega_j e^{-\xi_j \omega_j t} \quad \text{pour } \dot{u}_k(t) \end{cases} \quad (\text{C.28})$$

$$\begin{cases} \alpha_{\ddot{u}_{kj}}(t) &= \tilde{\omega}_j t - \varphi_j + \theta_j + \frac{\pi}{2}(1 + \text{sgn}(\Phi_{kj})) \\ A_{\ddot{u}_{kj}}(t) &= |\Phi_{kj}| \rho_j \omega_j^2 e^{-\xi_j \omega_j t} \quad \text{pour } \ddot{u}_k(t) \end{cases} \quad (\text{C.29})$$

Si l'on fait l'hypothèse d'un faible amortissement, le signal analytique est alors approché par le signal complexe associé :  $Z_{kj}(t) \approx A_{kj}(t)e^{\alpha_{kj}(t)}$ .

### C.2.2 Relation entre les données mesurées et les paramètres modaux

Les données pour l'identification modale viennent sous forme de fonctions instantanées : l'amplitude  $A_{u_{kj}}(t)$  (ou  $A_{\dot{u}_{kj}}(t)$  ou  $A_{\ddot{u}_{kj}}(t)$ ) et la phase  $\alpha_{u_{kj}}(t)$  (ou  $\alpha_{\dot{u}_{kj}}(t)$  ou  $\alpha_{\ddot{u}_{kj}}(t)$ ) de chaque composante, extraites des transformées en ondelettes des mesures des réponses libres  $u_k(t)$  (ou  $\dot{u}_k(t)$  ou  $\ddot{u}_k(t)$ ) au point  $k$ . Des relations instantanées simples  $R(t)$  entre les données et les paramètres modaux se déduisent des équations (C.27), (C.28) et (C.29). L'estimation des paramètres modaux est alors effectuée à l'aide d'une technique d'identification paramétrique basée sur la minimisation, par la méthode des moindres carrés, d'un critère d'erreur défini comme la différence entre les fonctions instantanées provenant de la mesure  $R^{mesure}(t)$  et celles obtenues avec le modèle  $R^{modele}(t)$ .

1) Utilisation de la phase : L'évolution temporelle de la phase  $\alpha_{u_{kj}}(t)$  (ou  $\alpha_{\dot{u}_{kj}}(t)$  ou  $\alpha_{\ddot{u}_{kj}}(t)$ ) donnée par l'équation (C.27) (ou (C.28) ou (C.29)) est une droite de pente  $\tilde{\omega}_j$  ; l'estimation de  $\tilde{\omega}_j$  mène alors à un problème de régression linéaire. L'évolution temporelle de l'arête  $a_{r_{u_{kj}}}(t)$  obtenue par l'équation (C.20), donne :

$$\tilde{\omega}_j = \dot{\alpha}_{u_{kj}} = \frac{K}{a_{r_{u_{kj}}}(t)} \quad (\text{C.30})$$

ou

$$\tilde{\omega}_j = \dot{\alpha}_{\dot{u}_{kj}} = \frac{K}{a_{r_{\dot{u}_{kj}}}(t)} \quad (\text{C.31})$$

ou

$$\tilde{\omega}_j = \dot{\alpha}_{\ddot{u}_{kj}} = \frac{K}{a_{r_{\ddot{u}_{kj}}}(t)} \quad (\text{C.32})$$

Deux autres relations basées sur la phase donnent directement le taux d'amortissement

$$\xi_j = |\cos(\delta_j - \pi \text{sgn}(\Phi_{kj}))| = |\cos(\alpha_{u_{kj}}(t) - \alpha_{\dot{u}_{kj}}(t))| \quad (\text{C.33})$$

ou

$$\xi_j = \left| \cos \left( \frac{\theta_j + \pi \text{sgn}(\Phi_{kj})}{2} \right) \right| = \left| \cos \left( \frac{\alpha_{\ddot{u}_{kj}}(t) - \alpha_{u_{kj}}(t)}{2} \right) \right| \quad (\text{C.34})$$

La différence de phase  $d_j^{kl}(t)$  du mode  $j$  entre les points  $k$  et  $l$

$$d_j^{kl}(t) = \alpha_{u_{kj}}(t) - \alpha_{u_{lj}}(t) = -(\alpha_{\dot{u}_{kj}}(t) - \alpha_{\dot{u}_{lj}}(t)) = -(\alpha_{\ddot{u}_{kj}}(t) - \alpha_{\ddot{u}_{lj}}(t)) \quad (\text{C.35})$$

est soit nulle, soit égale à  $\pm\pi$

$$d_j^{kl}(t) = \frac{\pi}{2}(\text{sgn}(\Phi_{lj}) - \text{sgn}(\Phi_{kj})) \quad (\text{C.36})$$

Par conséquent,  $\Phi_{kj}$  et  $\Phi_{lj}$  sont de mêmes signes si  $d_j^{kl}(t) = 0$  et de signes opposés si  $d_j^{kl}(t) = \pm\pi$ .

2) Utilisation des amplitudes :  $\omega_j$  peut être exprimé par

$$\omega_j = \frac{A_{\dot{u}_{kj}}(t)}{A_{u_{kj}}(t)} \quad \text{ou} \quad \omega_j = \frac{A_{\ddot{u}_{kj}}(t)}{A_{\dot{u}_{kj}}(t)} \quad (\text{C.37})$$

L'évolution temporelle du logarithme de l'amplitude  $\log(A_{u_{kj}}(t))$  (ou  $\log(A_{\dot{u}_{kj}}(t))$  ou  $\log(A_{\ddot{u}_{kj}}(t))$ ) est une droite de pente  $-\xi_j\omega_j$  comme on peut le voir ci-dessous

$$\begin{aligned} \log(A_{u_{kj}}(t)) &= \log(|\Phi_{kj}|\rho_j) - \xi_j\omega_j t \\ \log(A_{\dot{u}_{kj}}(t)) &= \log(|\Phi_{kj}|\rho_j\omega_j) - \xi_j\omega_j t \\ \log(A_{\ddot{u}_{kj}}(t)) &= \log(|\Phi_{kj}|\rho_j\omega_j^2) - \xi_j\omega_j t \end{aligned} \quad (\text{C.38})$$

Là encore, le problème d'identification est un problème de régression linéaire. Le rapport  $A_{u_{kj}}(t)/A_{u_{mj}}(t)$  de l'amplitude de la  $j^{\text{ème}}$  composante de la réponse au point  $k$  sur celle au point  $m$  est une constante temporelle, qui est égale à la valeur absolue de la  $k^{\text{ème}}$  composante du mode  $j$ , d'où

$$\frac{|\Phi_{kj}|}{|\Phi_{mj}|} = |\Phi_{kj}| = \frac{A_{u_{kj}}(t)}{A_{u_{mj}}(t)} \quad (\text{C.39})$$

## C.3 Aspects pratiques de la TOC

### C.3.1 Ondelette mère

L'ondelette mère de Cauchy est l'ondelette mère que nous avons utilisé dans le code de calcul. Les principales caractéristiques de ce type d'ondelette mère sont répertoriées dans le tableau C.1

	Ondelette de Cauchy
$\psi(t)$	$\left(\frac{i}{t+i}\right)^{n+1}$
$\hat{\psi}(\omega)$	$\frac{2\pi\omega^n e^{-\omega}}{n!} \Theta(\omega)$
$C_\psi$	$4\pi^2 \frac{1}{2^{2n}} \frac{(2n-1)!}{(n!)^2}$
$t_\psi$	0
$\omega_\psi$	$n + \frac{1}{2}$
$\Delta\omega_\psi$	$\frac{\sqrt{2n+1}}{2}$
$\Delta t_\psi$	$\frac{1}{\sqrt{2n-1}}$
$\mu_\psi$	$\frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{2}{2n-1}}$
$Q = \frac{\omega_\psi}{2\Delta\omega_\psi}$	$\frac{n+\frac{1}{2}}{\sqrt{2n+1}}$

**TABEAU C.1 – Caractéristiques de l’ondelette mère de Cauchy.**

Par ailleurs, avec ce type d’ondelette mère, les dérivées au premier et au second ordre de  $\psi_n$  sont aussi des ondelettes de Cauchy puisque

$$\dot{\psi}_n(t) = i(n+1)\psi_{n+1}(t) \quad (\text{C.40})$$

et

$$\ddot{\psi}_n(t) = -(n+1)(n+2)\psi_{n+2}(t) \quad (\text{C.41})$$

Alors la procédure d’identification avec  $\dot{u}$  et  $\ddot{u}$  peut être simplifiée à l’aide de l’équation (C.13).

La localisation de l’ondelette mère de Cauchy et de sa version dilatée-translatée avec  $a > 1$  (effet de dilatation en temps et de compression en fréquence) et  $a < 1$  (effet de compression en temps et de dilatation en fréquence) sont illustrées sur la figure C.2.



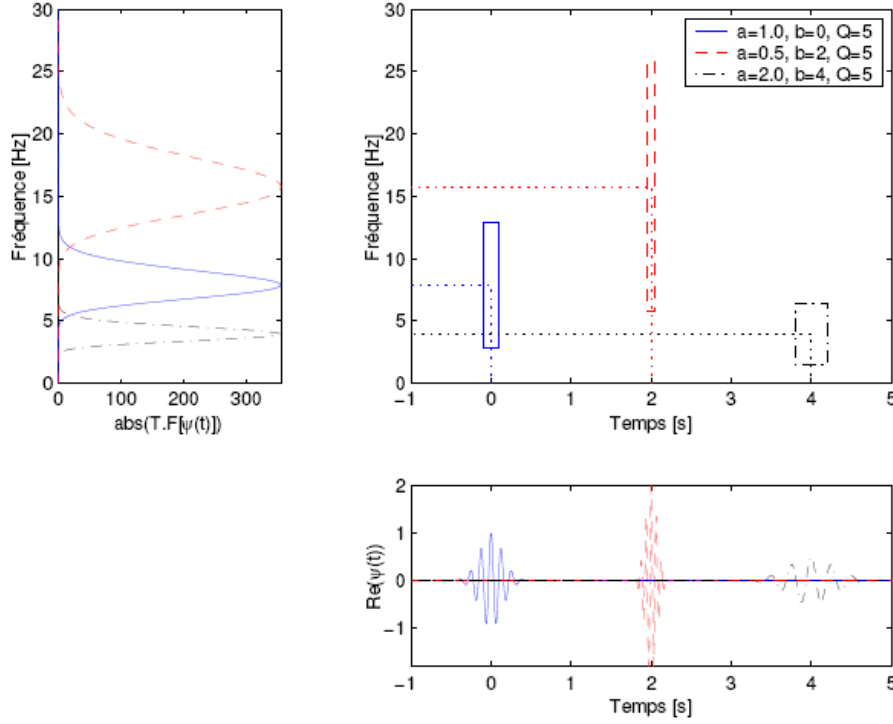


FIGURE C.2 – Localisation dans le plan temps-fréquence de l'ondelette mère de Cauchy (trait continu (-)) et de sa version dilatée-translatée avec  $a>1$  (traits pointillés (-.)) et  $a<1$  (traits discontinus (- -)), d'après [2].

### C.3.2 Effet de bords

Le signal mesuré  $u(t)$  est, en général, échantillonné sur une durée finie  $L$ . Chaque point de mesure est espacé d'une valeur  $T$ , la période d'échantillonnage. Le contenu fréquentiel de cette version discrète est limité par la fréquence de Nyquist  $f_{\text{Nyquist}} = \frac{1}{2T}$ . Puisque le signal est de durée finie et échantillonné avec une période d'échantillonnage non nulle, il existe une anomalie aux bords appelée : l'effet de bords (Fig. C.3).

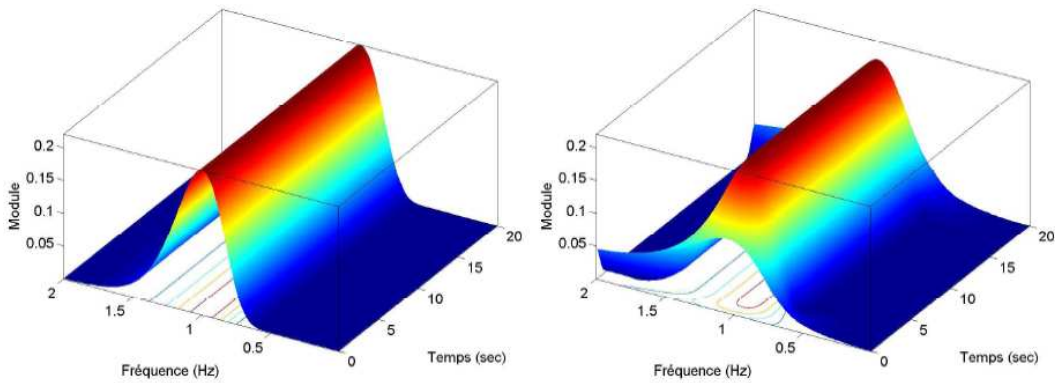


FIGURE C.3 – Modules de la TO (avec l'ondelette de Cauchy) d'un signal avec une longueur infinie (à gauche) et finie (à droite), d'après [2].

Il est donc important d'essayer de déterminer un domaine  $D$  sur le plan temps-fréquence  $(t, \omega)$  où l'effet de bords peut être négligeable. On introduit alors deux coefficients réels  $c_t$  et  $c_f$  supérieurs ou égaux à 1 tel que :  $t \notin I_{c_t} = [t_\psi - c_t \Delta t_\psi, t_\psi + c_t \Delta t_\psi]$  et  $\omega \notin I_{c_f} = [\omega_\psi - c_f \Delta \omega_\psi, \omega_\psi + c_f \Delta \omega_\psi]$ ,  $\psi(t)$

et  $\hat{\psi}(\omega)$  ont de bonnes propriétés de décroissance. Cela signifie que  $\psi(t)$  et  $\hat{\psi}(\omega)$  sont nulles ou très «petites». Le choix de  $c_t$  et  $c_f$  est expliqué en détail dans [1].

On définit ensuite le domaine  $D$  comme un domaine de localisation «étendu» sur le plan temps-fréquence pour la transformation en ondelettes autour du point  $(b_j, \omega_j)$ . C'est la version «étendue» de la formule (C.9). En combinant les coefficients  $c_t$  et  $c_f$  avec la propriété progressive de l'ondelette mère de Cauchy,  $D$  devient :

$$\begin{aligned} & [b_j + \frac{\omega_\psi}{\omega_j} t_\psi - \frac{\omega_\psi}{\omega_j} c_t \Delta t_\psi, \quad b_j + \frac{\omega_\psi}{\omega_j} t_\psi + \frac{\omega_\psi}{\omega_j} c_t \Delta t_\psi] \\ & \times \left[ \max \left( 0, \omega_j \left( 1 - c_f \frac{\Delta \omega_\psi}{\omega_\psi} \right) \right), \quad \omega_j \left( 1 + c_f \frac{\Delta \omega_\psi}{\omega_\psi} \right) \right] \end{aligned} \quad (C.42)$$

Le domaine  $D$  doit être inclus dans  $[0, L] \times [0, 2\pi f_{Nyquist}]$ , on arrive alors au système d'inégalités suivant

$$\begin{cases} \frac{\omega_\psi}{\omega_j} c_t \Delta t_\psi - \frac{\omega_\psi}{\omega_j} t_\psi \leq b_j \leq L - \frac{\omega_\psi}{\omega_j} c_t \Delta t_\psi - \frac{\omega_\psi}{\omega_j} t_\psi \\ 0 < \omega_j \leq \frac{2\pi f_{Nyquist}}{1 + c_f (\Delta \omega_\psi / \omega_\psi)} \end{cases} \quad (C.43)$$

Finalement, en introduisant  $Q$  et  $\mu_\psi$ , en tenant compte que  $t_\psi = 0$ , ce qui est vrai pour les ondelettes de Cauchy, le système (C.43) devient

$$\begin{cases} \frac{1}{b} c_t 2Q \mu_\psi \leq b_j \leq L - \frac{1}{\omega_j} c_t 2Q \mu_\psi t_\psi - \frac{\omega_\psi}{\omega_j} t_\psi \\ 0 < \omega_j \leq \frac{2\pi f_{Nyquist}}{1 + c_f (1/(2Q))} \end{cases} \quad (C.44)$$

Comme le montrent les inégalités du système (C.44),  $D$  est limité par deux hyperboles définies par :  $\omega = \frac{2}{b} c_t Q \mu_\psi$  et  $\omega = \frac{2}{L-b} c_t Q \mu_\psi$  et deux lignes horizontales dont les équations sont :  $\omega = 0$  et  $\omega = \frac{2\pi f_{Nyquist}}{1 + c_f (1/(2Q))}$ . Puisque les deux coefficients  $c_t$  et  $c_f$  sont supérieurs à 1, en général de l'ordre de 4–5, l'intervalle de temps utile est plus petit que la durée du signal  $L$  et l'intervalle de fréquence utile est plus petit que  $f_{Nyquist}$ . Ce domaine  $D$ , illustré sur la figure C.4, dont l'effet de bord est négligeable sera utilisé dans la procédure d'identification modale.

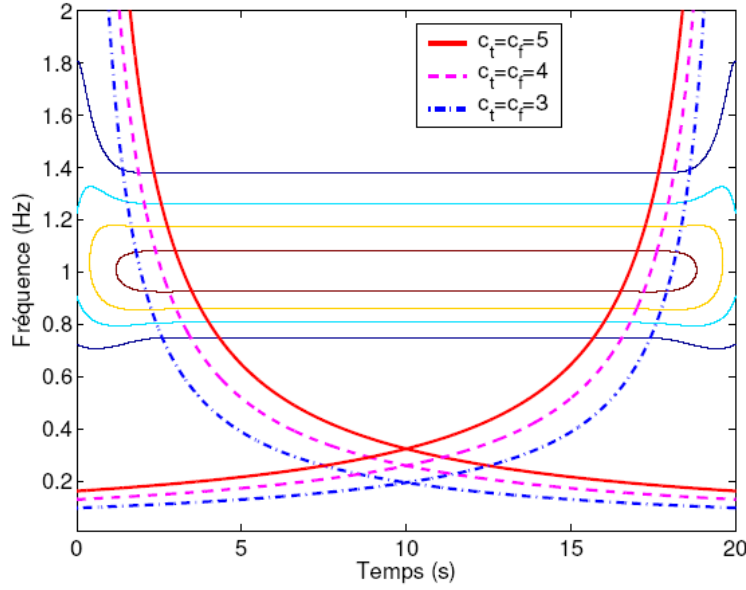


FIGURE C.4 – Modules de la TO d'un signal sur le plan temps-fréquence. Les différents domaines  $D$ , où l'effet de bord est négligé, sont représentés pour plusieurs valeurs de  $c_t$  et  $c_f$ , d'après [2].

### C.3.3 Découplage des modes : choix du paramètre de l'ondelette mère

Il est très important de choisir de bonnes valeurs pour les paramètres des ondelettes mères afin d'isoler les composantes d'un signal multi-composantes. Supposons que l'on s'intéresse à une composante  $j$  quelconque avec une fréquence  $\omega_j$  dans un signal de  $N$  composantes. La fréquence la plus proche à isoler est éloignée d'une quantité  $d\omega_j$ . Pour résoudre ce problème, on doit faire appel à la résolution fréquentielle de la transformée en ondelettes sur le plan temps-fréquence le long d'une arête de fréquence  $\omega_j$ . D'après la formule (C.42), la localisation fréquentielle qui est

$\left[ \max \left( 0, \omega_j \left( 1 - c_f \frac{\Delta\omega_\psi}{\omega_\psi} \right) \right), \omega_j \left( 1 + c_f \frac{\Delta\omega_\psi}{\omega_\psi} \right) \right]$  doit être incluse dans l'intervalle  $[\omega_j - d\omega_j, \omega_j + d\omega_j]$ .

Il en résulte que

$$Q \geq c_f \frac{\omega_j}{2d\omega_j} \quad (\text{C.45})$$

Pour généraliser, on note  $d\omega_j = \min [(\omega_j - \omega_{j-1}), (\omega_{j+1} - \omega_j)]$  pour  $1 \leq j \leq N$  avec  $\omega_0 = 0$  et  $\omega_{N+1} = 2\pi f_{Nyquist}$ . Plus la valeur de  $Q$  augmente, plus l'effet de découplage entre les composantes est bon mais plus l'effet de bord perturbe le plan temps-fréquence. Il faut que le domaine  $D$  défini à la relation (C.44) soit non vide. La deuxième inégalité de la relation est immédiatement vérifiée car  $d\omega_j < \pi f_{Nyquist}$ . Donc, il faut seulement que la deuxième inégalité est un sens. En combinant avec l'inégalité de Heisenberg ( $\mu_\psi \geq \frac{1}{2}$ ), nous avons la condition

$$Q \leq \frac{L\omega_j}{2c_t} \quad (\text{C.46})$$

et finalement, le paramètre  $Q$  doit appartenir à l'intervalle

$$c_f \frac{\omega_j}{2d\omega_j} \leq Q \leq \frac{L\omega_j}{2c_t} \quad (\text{C.47})$$

Une fois que  $Q$  est choisi, les paramètres des ondelettes de Cauchy sont déterminés en fonction de  $Q$  suivant les relations du tableau C.1. Avec la formule (C.47),  $L$  et  $f_{Nyquist}$  sont obtenus à partir des mesures, les fréquences  $\omega_j$  peuvent être évaluées grossièrement à partir de la TF du signal. Les coefficients  $c_t$  et  $c_f$  doivent satisfaire l'inéquation déduite de (C.47)

$$c_t c_f \leq L d\omega_j \quad (C.48)$$

Le choix de  $Q$  est libre dans l'intervalle donné par la relation (C.47) et dépend aussi du problème traité : plus la valeur de  $Q$  est élevée, plus l'effet de bord est significatif et moins l'effet de couplage est important (Fig. C.5). Dans le cas de modes très proches, c'est à dire  $d\omega_j$  faible, il est nécessaire que  $L$  soit suffisamment grand pour que la valeur de  $Q$  satisfasse la condition (C.47).

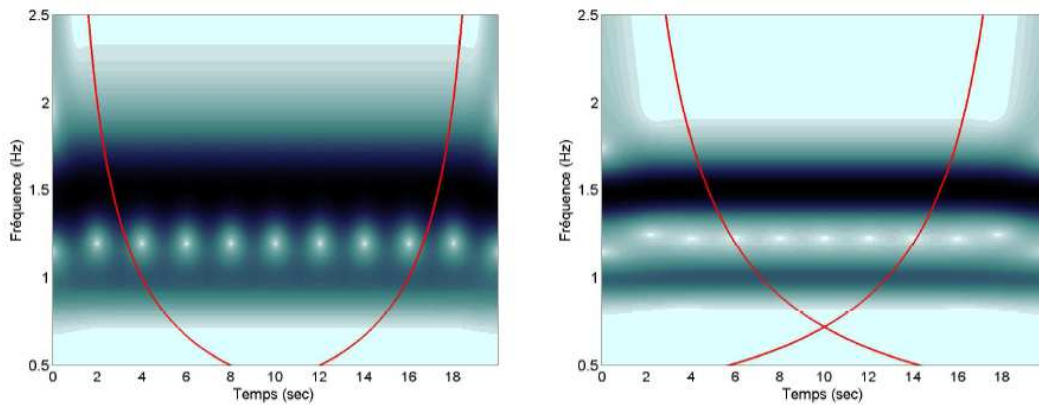


FIGURE C.5 – Modules de la TO (Cauchy) d'un signal avec  $Q = 5$  (à gauche) et  $Q = 9$  (à droite), d'après [2].

# Bibliographie

- [1] Le T.P, Argoul P., *Continuous wavelet transform for modal identification using free decay response*, Journal of Sound and Vibration, 277, 73-100, 2004.
- [2] Nguyen T.M., *Dynamique non linéaire des systèmes mécaniques couplés : Réduction de modèle et Identification*, Thèse, ENPC, 2007.
- [3] Torrèsani B., *Analyse Continue par Ondelettes*, InterEditions / CNRS Editions, 1995.
- [4] Delprat N.,Escudie B.,Guillemain P., *Asymptotic wavelet and Gabor analysis : extraction of instantaneous frequencies*, IEEE, 38, 644-664, 1992.
- [5] Carmona R.,Hwang W.L.,Torrèsani B., *Multi-ridge detection and time-frequency reconstruction*, IEEE Transactions on Signal Processing, 47, 480-492, 1999.
- [6] Torrèsani B., *Time-frequency and time-scale analysis*, Signal Processing for Multimedia, pp. 37-52, 2007.

# Annexe D

## Méthode des sous-espaces

Les méthodes par sous-espaces datent des années 70, avec le développement de l'analyse statistique multi-variables, en particulier de l'analyse en composantes principales (ACP) et de l'analyse de corrélation canonique. C'est une méthode *output-only*. Les approches actuelles utilisées pour l'identification des systèmes datent de la fin des années 1980. Elles sont basées sur la factorisation QR ou la décomposition en valeurs singulières (SVD) [1]. L'intérêt de ces approches réside dans le fait de ne pas nécessiter des techniques d'optimisation, ni d'imposer une forme canonique au système. Ainsi, les algorithmes de sous-espaces peuvent également aussi bien s'appliquer à l'identification des systèmes MIMO qu'aux systèmes SISO. D'ailleurs, il a été montré dans [3] que des méthodes d'identification par sous-espaces à base de covariances peuvent être rendues assez robustes pour manipuler des excitations non stationnaires. Un autre avantage de l'identification par sous-espaces est l'utilisation du concept de représentation d'états sur lequel est basée l'évolution des techniques modernes de conception de commande.

Le principe de l'identification par sous-espaces consiste à identifier la séquence des états sur la base de mesures [2]. Ceci est réalisé en deux étapes. D'abord, par la projection des matrices de Hankel et ensuite par la factorisation QR ou par la décomposition SVD. La factorisation QR permet de réduire le traitement des données tandis que la décomposition SVD conduit à rejeter l'effet du bruit (qui se traduit par des modes erronés, non représentatifs de la dynamique du système). Une fois que la séquence des états a été calculée, le problème d'identification du modèle d'état devient un problème linéaire des moindres carrés. Les matrices de bruit de processus et de mesures peuvent être calculées à partir des résidus des moindres carrés.

### Les différentes étapes de l'algorithme des sous-espaces

L'implémentation pratique de l'algorithme est la suivante :

1. Détermination d'une suite de covariances empiriques  $\tilde{R}_i$  à partir des données collectées  $Y_1, \dots, Y_N$  par les différents capteurs . Pour le calcul de cette suite, on utilise l'approximation suivante de

l'espérance mathématique :

$$R_i = E(Y_i Y_{t-i}^T) \approx \frac{1}{N-i} \sum_{t=i+1}^N Y_t Y_{t-i}^T \quad (\text{D.1})$$

où  $N$  est la longueur du signal dont on dispose et  $i$  l'indice du capteur.

2. Calcul de la matrice de Hankel empirique  $\tilde{H}_{p+1,q}$

3. Décomposition en valeurs singulières de la matrice de Hankel empirique  $\tilde{H}_{p+1,q}$  comme suit :

$$\tilde{H}_{p+1,q} = (U_1 \ U_2) \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix} V^T$$

où  $S_1$  correspond à la valeur singulière d'ordre  $m$ .

4. Estimer la matrice d'observabilité.

$$\tilde{O}_{p+1,q}(\tilde{H}, \tilde{F}) = U_1 S_1^{\frac{1}{2}} T \quad (\text{D.2})$$

5. Détermination de la matrice  $H$ .

6. Détermination de la matrice  $F$ .

7. Détermination des valeurs propres  $\lambda$  de  $F$ .

8. Détermination des paramètres dynamiques du système  $f$  et  $\rho$ .

9. Détermination des formes modales  $\phi_\mu$ . Pour l'application de l'algorithme, il faut bien sûr respecter la condition de Shannon :

$$f_s > 2.f_k$$

avec  $f_s$  la fréquence d'échantillonnage et  $f_k$  la fréquence du  $k^{\text{ème}}$  mode que l'on souhaite observer.

**Note :** La méthode des sous espaces est tributaire du choix de l'ordre de système et de la présence de modes erronés stables

# Bibliographie

- [1] De Moor B., Moonen M., Vandenberghe L., Vandewalle, J. *Identification of linear state space models with svd using cononical correlation analysis*, Singular Value Decomposition and Signal Processing, pp. 161-169, 1988.
- [2] Van Overchee P., De Moor B., *Subspace identification for linear systems : Theory - Implementation - Applications.* , Kluwer Academic Publisher, 1st edition, 29(3), pp : 649-660, 1996.
- [3] Basseville M., Benveniste A., Goursat M., Hermans L., Mevel L., Van Der Auweraer H. *Output-only subspace-based structural identification : from theory to industrial testing practice*, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, 4, pp. 668-676, 2001.



## Annexe E

# Comparaison numérique-expérience et recalage

Dans cette partie, nous allons réaliser une analyse modale numérique sur une poutre E-E dont les dimensions sont les mêmes que celles de l'étude expérimentale. Le nombre de capteurs est égal à onze pour les capteurs ponctuels et dix pour les jauges longue base, le placement des capteurs est le même que pour l'expérience. Nous choisissons un essai expérimental de l'état sain et nous faisons une simulation de cet essai en utilisant la force du pot vibrant mesurée comme force d'excitation soit un choc d'amplitude 129N appliqué à 578mm de l'encastrement gauche. Le choc est simulé par une demi-sinusoïde dont la durée est égale à 0.004s.

La masse totale de la poutre est de 637.5g et un accéléromètre, en prenant en compte une partie du poids du câble, pèse environ 13g (soit 143g pour l'ensemble des accéléromètres). Les accéléromètres sont donc très intrusifs puisque la masse de la poutre augmente de presque 22.4% avec l'instrumentation. Ceci affectera le comportement dynamique de la poutre.

Lopez-Aenlle et al. [1] ont conclu que les résultats sont relativement bons, lorsque la quantité de la masse ajoutée sur une structure ne s'excède pas 5 % de la masse totale de la structure. Cependant, sur des structures légères, la masse ajoutée peut être trop élevée et mal distribuée. Pour cette raison, non seulement les fréquences de résonance varient, mais les modes propres changent également.

Pour cela, des essais ont été réalisés avant la mise en place des accéléromètres, à l'aide d'un capteur de déplacement laser. Les fréquences alors obtenues étaient en accord avec les fréquences théoriques : 80.93 Hz pour le premier mode (78.83 Hz pour la théorie, soit  $\approx 2.67\%$  d'écart), 220.31 Hz pour le deuxième mode (217.29 Hz pour la théorie, soit  $\approx 1.39\%$  d'écart) et 430.01 Hz pour le troisième mode (425.98 Hz pour la théorie, soit  $\approx 0.94\%$  d'écart).

Les signaux temporels numériques simulés et les TF correspondantes sont présentés sur la figure E.1.

Ainsi, afin de comparer les résultats, on a pris en compte dans le modèle numérique de la poutre saine la masse des accéléromètres. Nous avons ensuite traité les signaux avec la TO pour identifier les

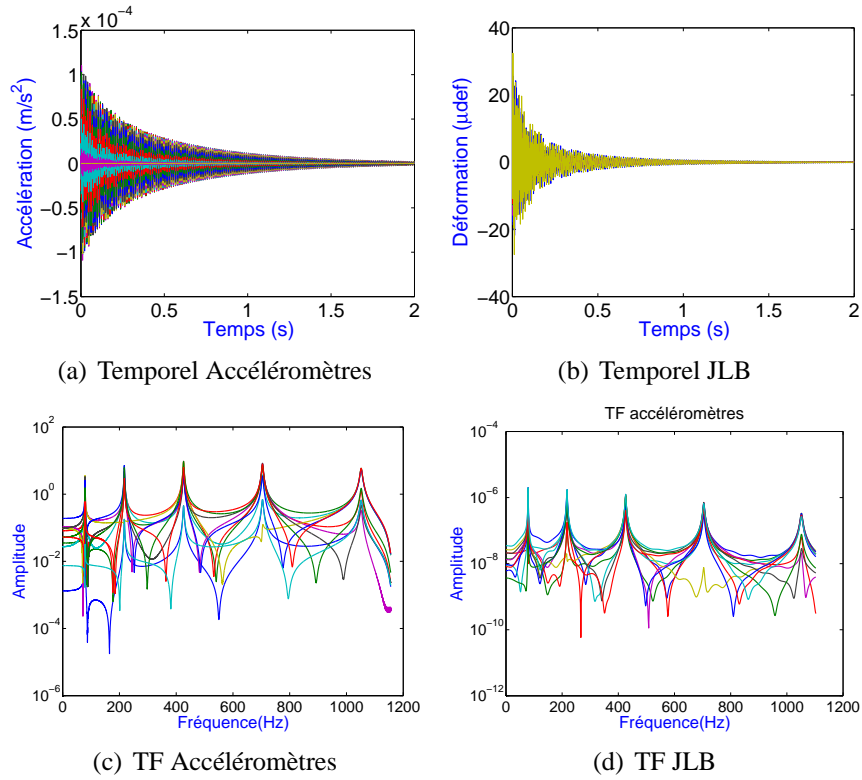


FIGURE E.1 – Signaux temporels et TF correspondantes pour les différents types de capteurs

paramètres modaux des signaux numériques. Les fréquences propres de la poutre expérimentale sont donc comparées à celles simulées par EF, afin de quantifier l'erreur de modélisation (Tab. E.1)

Les fréquences propres mesurées sont globalement assez proches de celles déterminées numériquement avec Matlab, (par exemple, la première vaut  $\approx 74.54Hz$  alors que le modèle numérique donne  $78.83Hz$ ). Cet écart s'explique du fait que d'un point de vue expérimental, la réalisation de l'encastrement est imparfaite. Les figures E.1(c) et E.1(d) montrent que des pics de faible amplitude apparaissent au niveau des TF des accélérations, cependant rien de comparable n'est observé sur les TF des JLB.

Mode	Fréquence propre		
	Moyenne		
	$f_{num}$	$f_{exp}$	$\frac{\delta f}{f}(\%)$
$n^o 1$	78.83	74.56	5.42
$n^o 2$	217.29	205.91	5.24
$n^o 3$	425.98	403.64	5.24
$n^o 4$	704.17	678.82	3.60

TABEAU E.1 – Quatres premières fréquences propres identifiées numériquement et expérimentalement.

Les figures E.2, E.3 et E.4 illustrent les résultats obtenus pour la détermination des déformées modales des trois premiers modes normalisés, à partir les accéléromètres, et des jauges longue base. Sur les figures E.2(b), E.3(b) et E.4(b), les courbes tracées en traits pointillés représentent respectivement les courbures modales  $\phi_1''(x)$ ,  $\phi_2''(x)$ , et  $\phi_3''(x)$  pour la poutre E-E. Dans l'ensemble, les résultats se cor-

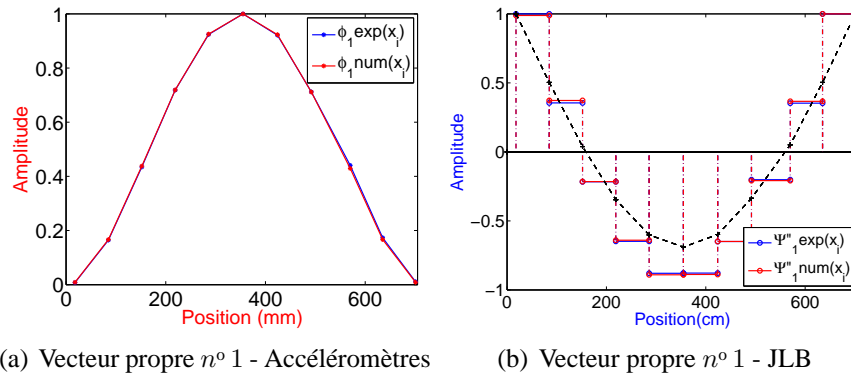


FIGURE E.2 – Déformées modales du premier mode obtenues pour deux types de capteurs : accéléromètres et JLB

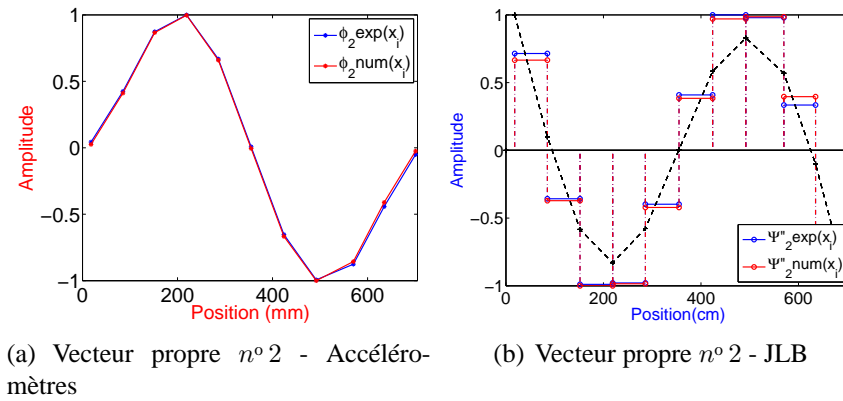


FIGURE E.3 – Déformées modales du deuxième mode obtenues pour deux types de capteurs : accéléromètres et JLB

rèlent de manière satisfaisante. Pour évaluer le degré de corrélation entre les déformées numériques et les déformées expérimentales, nous avons calculé les coefficients MAC présentés dans le tableau E.3 et illustres sur la figure E.5. On remarque que la valeur du MAC diminue lorsque le mode est plus élevé, ceci peut s'expliquer par le nombre le points limités.

Nous remarquons aussi sur les figures E.2, E.3 et E.4 que l'écart modes-calculés/modes-mesurés le plus important se trouve au niveau du point d'excitation. L'écart provient également de la surestimation de la raideur d'encastrement dans le modèle numérique, alors que l'encastrement réel n'est jamais parfait.

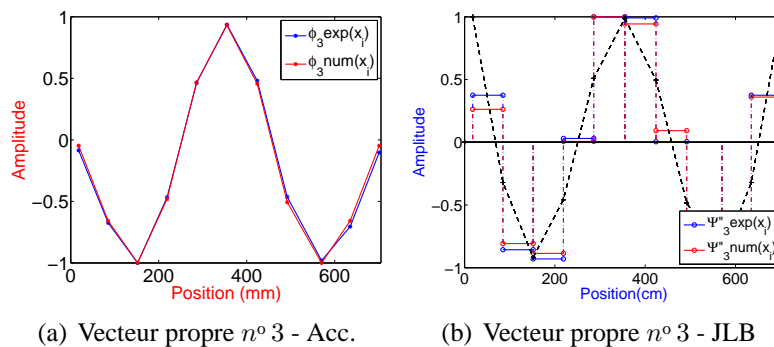


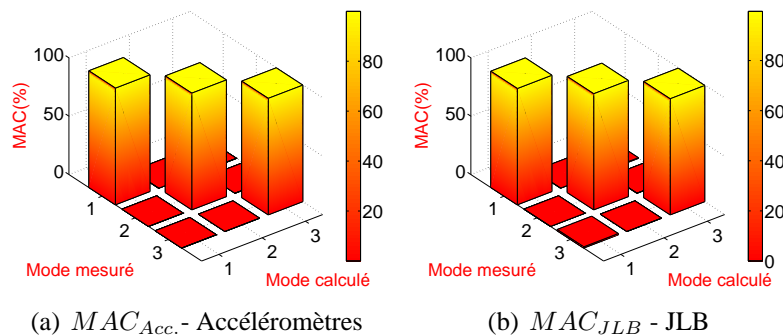
FIGURE E.4 – Déformées modales du troisième mode obtenues pour deux types de capteurs : accéléromètres et JLB

Capteur	Mode n° 1			Mode n° 2			Mode n° 3		
	$\phi_{num}$	$\phi_{exp}$	Erreur%	$\phi_{num}$	$\phi_{exp}$	Erreur%	$\phi_{num}$	$\phi_{exp}$	Erreur%
Acc. n° 1	0.008	0.009	10.04	0.043	0.025	41.74	-0.086	0.047	44.75
Acc. n° 2	0.164	0.167	1.36	0.426	0.411	3.44	-0.677	0.657	2.94
Acc. n° 3	0.432	0.438	1.37	0.873	0.867	0.77	-1.000	0.998	0.19
Acc. n° 4	0.716	0.719	0.39	1.000	0.997	0.29	-0.465	0.480	3.30
Acc. n° 5	0.922	0.925	0.33	0.667	0.659	1.12	0.466	-0.468	0.31
Acc. n° 6	1.000	1.000	0.00	0.011	-0.005	49.37	0.937	-0.931	0.66
Acc. n° 7	0.923	0.923	0.02	-0.653	-0.667	2.14	0.479	-0.455	5.02
Acc. n° 8	0.711	0.712	0.02	-0.995	-1.000	0.52	-0.466	0.506	8.69
Acc. n° 9	0.440	0.429	2.40	-0.878	-0.856	2.45	-0.982	1.000	1.88
Acc. n° 10	0.172	0.167	3.35	-0.442	-0.411	6.96	-0.701	0.657	6.25
Acc. n° 11	0.011	0.009	17.76	-0.051	-0.025	50.62	-0.102	0.047	53.58
JLB n° 1	0.988	1.000	1.18	-0.666	0.715	7.37	0.263	0.375	42.81
JLB n° 2	0.372	0.355	4.66	0.372	-0.357	3.85	-0.808	-0.856	6.04
JLB n° 3	-0.215	-0.217	0.63	1.000	-0.989	1.09	-0.885	-0.930	5.02
JLB n° 4	-0.640	-0.648	1.23	0.985	-0.979	0.62	0.007	0.031	329.82
JLB n° 5	-0.891	-0.880	1.23	0.421	-0.398	5.66	1.000	1.000	0.00
JLB n° 6	-0.888	-0.878	1.14	-0.384	0.409	6.55	0.943	0.991	5.08
JLB n° 7	-0.649	-0.649	0.10	-0.970	1.000	3.05	0.093	0.004	95.16
JLB n° 8	-0.208	-0.201	3.37	-0.986	0.979	0.70	-0.892	-0.946	6.03
JLB n° 9	0.366	0.353	3.54	-0.396	0.334	15.56	-0.865	-0.823	4.86
JLB n° 10	1.000	1.000	0.00	0.690	-0.715	3.62	0.360	0.375	4.08

**TABEAU E.2 – Vecteurs propres déterminés avec la TO à partir des signaux des accéléromètres et des JLB pour la poutre E-E.**

Mode	$MAC_v(\%)$	$MAC_{JLB}(\%)$
$n^{\circ} 1$	99.99	99.67
$n^{\circ} 2$	99.94	99.47
$n^{\circ} 3$	99.79	99.48

**TABEAU E.3 – Valeurs de MAC**



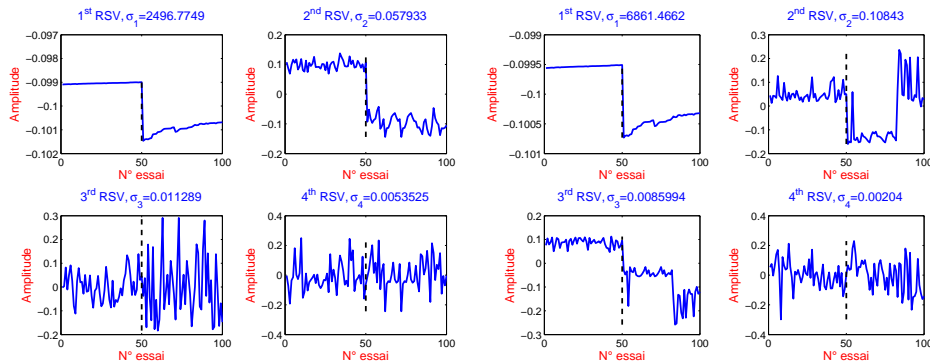
**FIGURE E.5 – MAC pour l'appariement des modes numérique/expérimental**

# Bibliographie

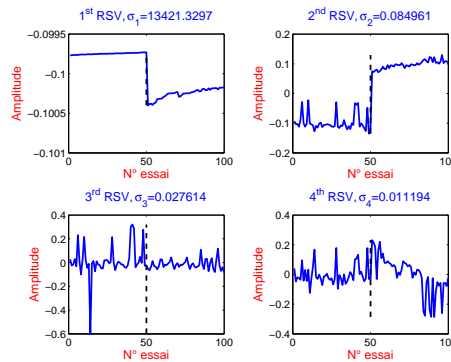
- [1] Lopez-Aenlle M., Fernandez P., Brincker R., Fernandez-Canteli A., *Scaling-factor estimation using an optimized mass-change strategy*, Mechanical Systems and Signal Processing 24, pp. 3061-3074, 2010.

## Annexe F

# Résultats expérimentaux issus de la SVD pour les différents états endommagés de la poutre E-E

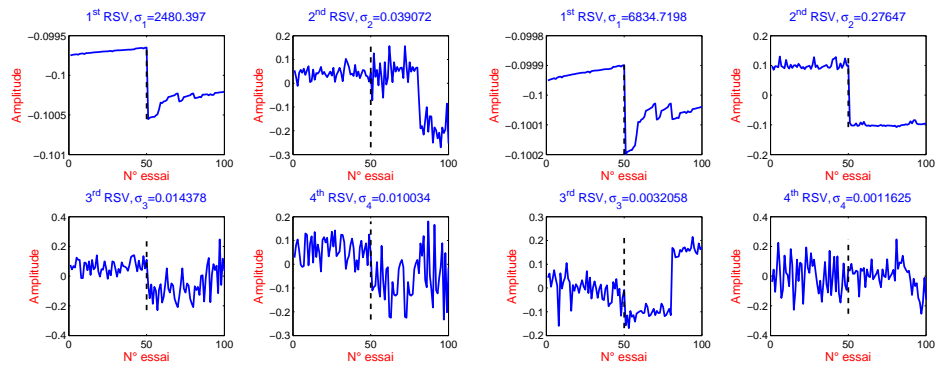


(a) RSV de la collection des 1<sup>ères</sup> fréquences propres (b) RSV de la collection des 2<sup>èmes</sup> fréquences propres

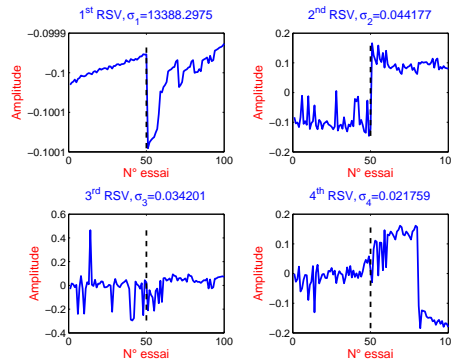


(c) RSV de la collection des 3<sup>èmes</sup> fréquences propres

FIGURE E.1 – Quatre premiers vecteurs singuliers à droite (RSV pour right singular vector) de la matrice de collection des fréquences propres  $A_{\lambda}^{(1:100)}$  - Trou de diamètre 8mm

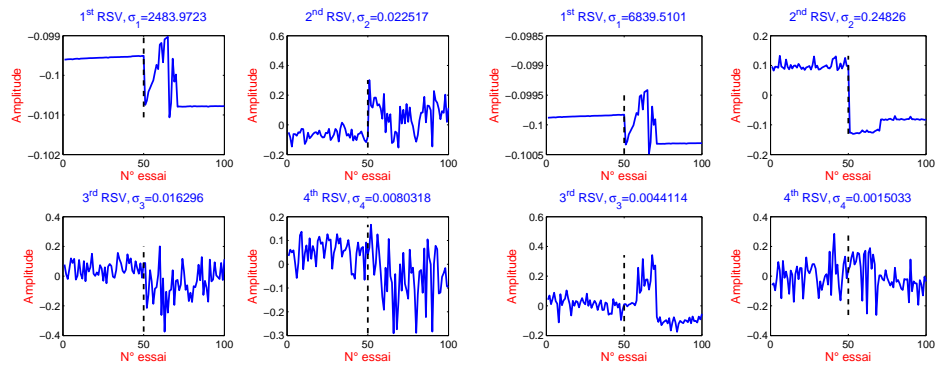


(a) RSV de la collection des 1<sup>ères</sup> fréquences propres (b) RSV de la collection des 2<sup>èmes</sup> fréquences propres

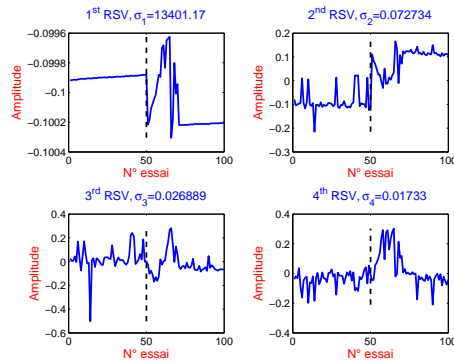


(c) RSV de la collection des 3<sup>èmes</sup> fréquences propres

FIGURE E.2 – Quatre premiers vecteurs singuliers à droite (RSV pour right singular vector) de la matrice de collection des fréquences propres  $A_{\lambda}^{(1:100)}$  - Trou de diamètre 6mm



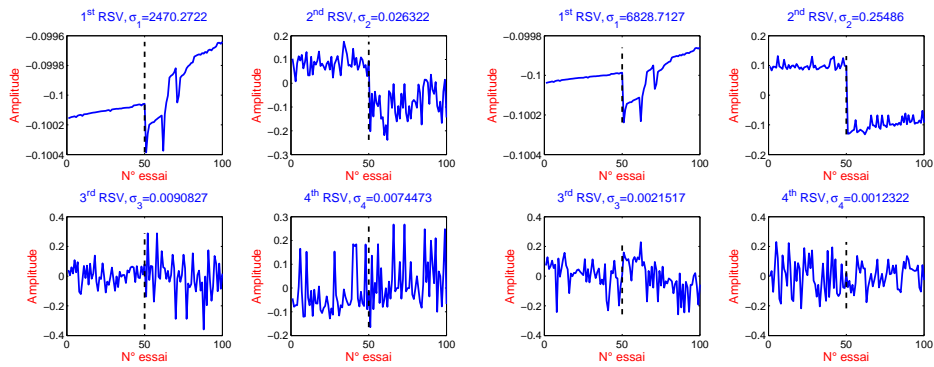
(a) RSV de la collection des 1<sup>ères</sup> fréquences propres (b) RSV de la collection des 2<sup>èmes</sup> fréquences propres



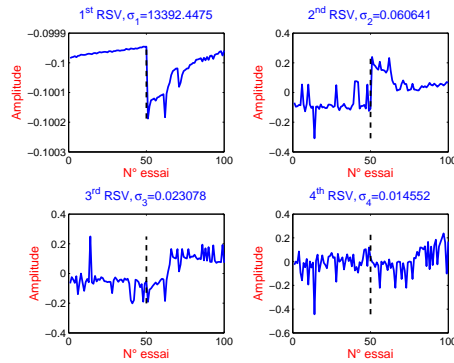
(c) RSV de la collection des 3<sup>èmes</sup> fréquences propres

**FIGURE E.3 – Quatre premiers vecteurs singuliers à droite (RSV pour right singular vector) de la matrice de collection des fréquences propres  $A_{\lambda}^{(1:100)}$  - Trou de diamètre 4mm**



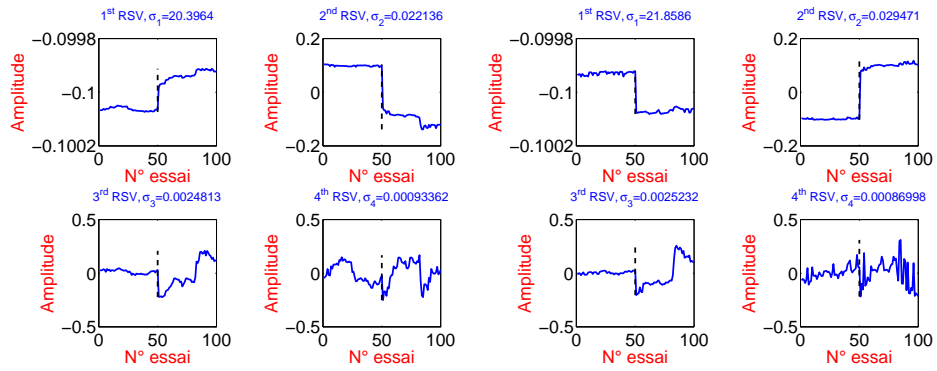


(a) RSV de la collection des 1<sup>ères</sup> fréquences propres (b) RSV de la collection des 2<sup>èmes</sup> fréquences propres

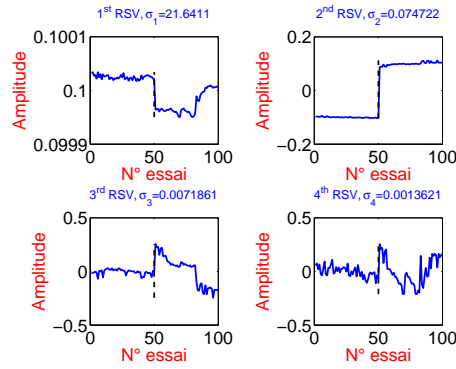


(c) RSV de la collection des 3<sup>èmes</sup> fréquences propres

FIGURE E.4 – Quatre premiers vecteurs singuliers à droite (RSV pour right singular vector) de la matrice de collection des fréquences propres  $A_{\lambda}^{(1:100)}$  - Trou de diamètre 2mm



(a) RSVs de la collection du premier mode (b) RSVs de la collection du deuxième mode



(c) RSVs de la collection du 1<sup>er</sup> mode

**FIGURE E.5 – Quatre premiers vecteurs singuliers à droite (RSV : right singular vector) de la matrice de collection des déformées modales  $A_{\Phi}^{(1:50)}$  - Trou 8mm**

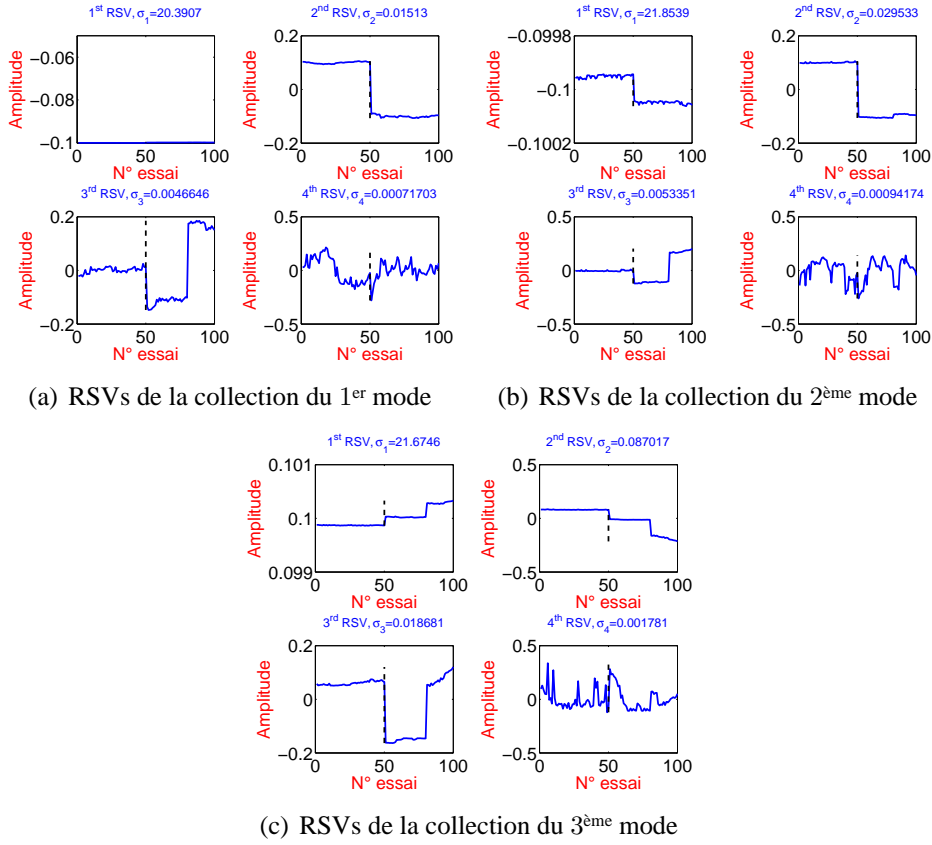


FIGURE F.6 – Quatre premiers vecteurs singuliers à droite (RSV : right singular vector) de la matrice de collection des déformées modales  $A_{\Phi}^{(1:100)}$  - Trou 6mm

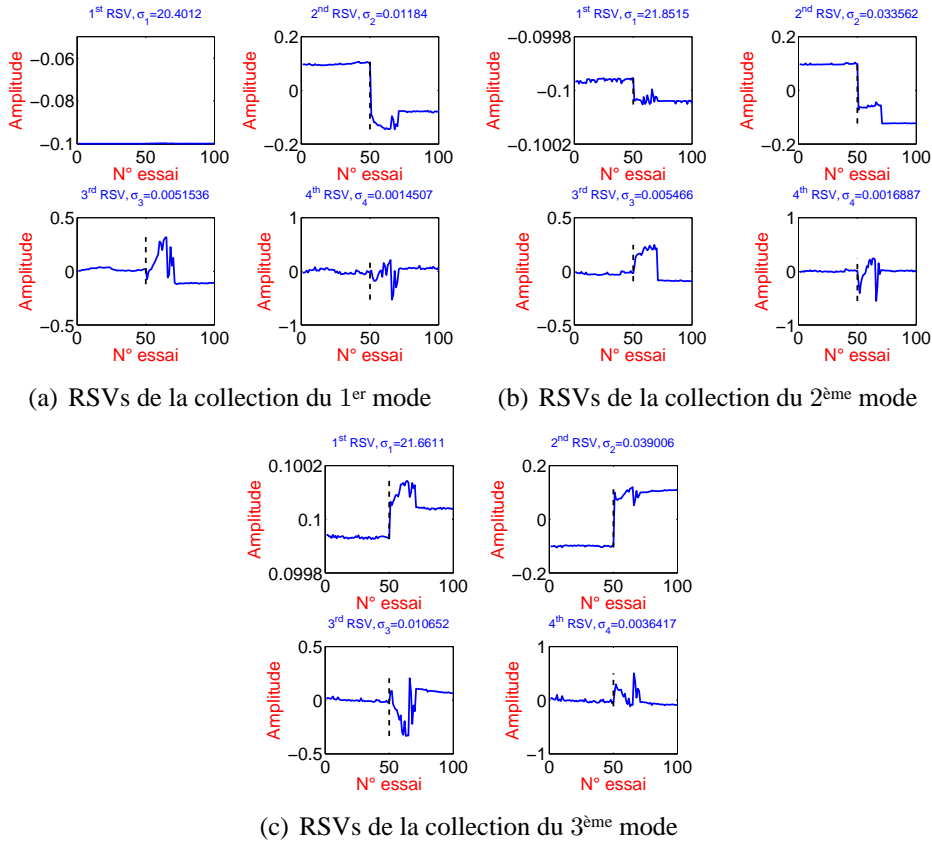


FIGURE F.7 – Quatre premiers vecteurs singuliers à droite (RSV : right singular vector) de la matrice de collection des déformées modales  $A_{\Phi}^{(1:100)}$  - Trou 4mm

## **Titre : Quels capteurs de vibrations pour la surveillance de santé des structures mécaniques ?**

**Résumés :** La thèse a pour objectif de définir les principes et les approches d'une mise en œuvre pratique des capteurs de vibrations pour l'évaluation dynamique des structures, notamment la détection d'endommagements. L'idée générale est d'étudier les combinaisons instrumentation/méthode de détection.

Ainsi, une étude numérique de sensibilité de différentes méthodes de détection et de localisation d'endommagement utilisant les paramètres modaux (essentiellement fréquences propres et déformées modales) a été réalisée en fonction du type de capteur utilisé, du nombre de capteurs, de la sévérité du défaut et de la dispersion des paramètres modaux. Le cas d'application choisi est celui d'une poutre en aluminium bi-encastée. Un panorama des capacités de chacune des méthodes pour l'évaluation dynamique des ouvrages a ainsi pu être dressé.

Dans l'ensemble, l'application des méthodes de détection d'endommagement a fourni de meilleurs résultats à partir de jauges de longue base de mesure. Une méthode développée au sein de l'équipe Dynamique, appliquée numériquement et expérimentalement, a également permis de localiser un défaut de masse et/ou de rigidité ainsi que de quantifier ces changements.

**Mots clés :** dynamique des structures, détection et localisation d'endommagements, analyse modale expérimentale, capteurs extensométriques.

## **Title : Which vibration sensors for health monitoring of mechanical structures ?**

**Summary :** The aim of the thesis is to define principles and approaches of a practical implementation of vibration sensors for dynamic monitoring of structures, specially damage detection. The general idea is to study the combinations instrumentation /detection method.

Thus, a numerical sensitivity study of different damage detection and localization methods using modal parameters (mainly natural frequencies and mode shapes) was performed according to the type of sensor used, to the number of sensors, to the severity of the damage, and to dispersion of modal parameters. The case-study is conducted on an aluminium clamped-clamped beam. A panorama of the capacity of each method for dynamic assessment of structures has been presented.

Overall, long base strain gauges provide better results for damage detection methods. A method developed in the Dynamic group applied to numerical and experimental data, is able to locate mass and /or flexural rigidity modifications and to quantify these perturbations.

**Key words :** structural dynamics, damage detection and localization, experimental modal analysis, strain sensors.

# Table des figures

1.1	Cas d'endommagements sur des poutres d'ouvrages d'art . . . . .	1
1.2	Comportement non linéaire d'une poutre avec une fissure au centre . . . . .	3
1.3	Distribution de déformations mesurées le long du tablier du pont A6358 aux Etats Unis [29] . . . . .	4
1.4	Photos d'une poutre console instrumentée par des accéléromètres, des ELB et des jauges [31]. . . . .	5
1.5	Vecteurs propres obtenus à partir des signaux des accéléromètres (a), des ELB (b) et des jauges (c) [32]. . . . .	5
2.1	Variation de LFCR d'une poutre en composites, en fonction de la position de l'endommagement [11] . . . . .	15
2.2	Changement d'amortissement modal : fissure sur l'élément 4 [19] . . . . .	16
2.3	(a) Poutre en béton armé fissurée par une flexion 4 points (b) Modes propres identifiés [28] . . . . .	18
2.4	Changement de flexibilité : éléments 29 ; 31 et 33 endommagés [41] . . . . .	19
2.5	Différence de courbure modale : (a) Mode 1, (b) Mode 3 (pont Z24 -côté Berne) [44] . . . . .	20
2.6	(a) Différence de flexibilité (défauts sur les éléments 31 et 46), (b) Différence de courbure de flexibilité (défauts sur les éléments 27 et 35) [41]. . . . .	23
2.7	Indicateur fondé sur l'énergie de déformation modale [54] . . . . .	25
2.8	Courbure de FRF numérique d'un système à ressorts : défaut entre les éléments $n^o$ 4 et $n^o$ 5. Les courbes représentent différents cas d'endommagements [58] . . . . .	29
2.9	Courbure de FRF expérimentale du pont I40 : défaut au niveau du point $n^o$ 7. Les courbes représentent différents cas d'endommagements [58] . . . . .	29
2.10	Différence de l'énergie de courbure de FRF pour un modèle de plaque EF pour une réduction de section : 83.33% ( à gauche) et 66.66% (à droite) [60] . . . . .	30
2.11	Représentation du filtrage spatial avec $n$ capteurs combinés linéairement [61] . . . . .	30
2.12	FRFs obtenues en isolant les 6 premiers modes, avec un endommagement local de 10% de perte de rigidité [61] . . . . .	32
2.13	Analyse par transformée en ondelettes d'une poutre fissurée [64] . . . . .	33
2.14	Etudes des effets thermiques sur le pont Z24 (a : site d'étude Z24 , b : Evolution de la première fréquence propre en fonction de la température) [74] . . . . .	36

2.15	Variations de la fréquence propre et de l'amortissement modal du premier mode avec la température ambiante, du premier janvier 2009 au 28 février 2010. Bâtiment de l'Ophite, Lourdes, France [77] . . . . .	37
3.1	(a) Vue du pont Xinghai Bay (b) modèle EF [22]. . . . .	52
3.2	(a) Méthode EI (b) Méthode MinMAC [22] . . . . .	53
3.3	(a) 4 <sup>ème</sup> déformée modale d'une poutre L-L intacte. Les courbes en trait plein représentent la 4 <sup>ème</sup> courbure modale déterminée pour différentes résolutions spatiales (b) 150 points ; (c) 60 points ; (d) 30 points ; (e) 15 points. Les courbes en pointillés représentent la courbure modale idéale [24]. . . . .	54
3.4	Comparaison de la résolution optimale déterminée analytiquement (triangle) et numériquement (carré) pour les courbures modales [24] . . . . .	56
4.1	Modèle EF de la poutre encastree-encastree . . . . .	61
4.2	Modèle EF de la poutre E-E endommagée . . . . .	62
4.3	Graphes des quatre premières déformées modales, déformées angulaires et courbures modales pour la poutre E-E saine. . . . .	63
4.4	Placement d'ELB en continu sur la poutre E-E. . . . .	66
4.5	Quatre premières déformées modales obtenues par des capteurs ponctuels pour les différents cas d'endommagement . . . . .	66
4.6	Variations relatives des déformées modales obtenues pour les 20 cas de défaut avec trois types de capteurs(de déplacement, de rotation et de déformation) (Seuls les 4 premiers modes sont pris en compte) . . . . .	67
4.7	Quatre premières déformées modales $\Psi_k$ obtenues à partir des ELB pour 20 cas de défaut . . . . .	68
4.8	Différences absolues des déformées modales obtenues à partir des ELB pour les 4 premiers modes et les différents cas de défaut . . . . .	68
4.9	Variations relatives des déformées modales obtenues à partir de 20 ELB pour les 20 cas de défaut (Seuls les 4 premiers modes sont pris en compte) . . . . .	69
4.10	Coefficients MAC et COMAC(en %) pour deux types de capteurs (capteurs ponctuels et ELB) . . . . .	70
4.11	Changement de flexibilité pour les quatre types de capteurs et les différents cas de défauts . . . . .	71
4.12	Quatre premières courbures modales obtenues par les capteurs ponctuels pour les différents cas d'endommagement . . . . .	72
4.13	Différence absolue des courbure modales pour les 4 premiers modes et les différents cas de défaut . . . . .	72
4.14	Différence absolue de courbure modale obtenue pour 20 cas de défaut avec 20 capteurs ponctuels (Seuls les 4 premiers modes sont pris en compte) . . . . .	73
4.15	Changement de courbure modale obtenu à partir des capteurs ponctuels pour 2% et 20% d'endommagement et différents niveaux de bruit . . . . .	74

4.16	Changement des déformées modales à partir des ELB pour 2% et 20% d'endommagement et différents niveaux de bruit . . . . .	74
4.17	Variation des courbures modales en fonction du nombre de capteurs ponctuels avec et sans ajout de bruit . . . . .	75
4.18	Variation des vecteurs propres en fonction du nombre d'ELB . . . . .	76
4.19	Changement de courbure de flexibilité pour les différents cas de défaut et les quatre types de capteurs . . . . .	76
4.20	Changement de courbure de flexibilité à partir des capteurs ponctuels pour des endommagements de 2% et 20%, et différents niveaux de bruit . . . . .	77
4.21	Changement de courbure de flexibilité à partir des ELB pour des endommagements de 2% et 20%, et différents niveaux de bruit . . . . .	77
4.22	Variation des courbures de flexibilité en fonction du nombre de capteurs ponctuels	77
4.23	Variation des courbures de flexibilité en fonction du nombre d'ELB . . . . .	78
4.24	Changement de l'énergie de déformation à partir des quatre types de capteurs pour les différents cas de défauts ( $z_s = 2$ ) . . . . .	79
4.25	Changement de l'énergie de déformation à partir des capteurs ponctuels pour des endommagements de 2% et 20%, et différents niveaux de bruit ( $z_s = 2$ ) . . .	80
4.26	Changement de l'énergie de déformation à partir des ELB pour des endommagements de 2% et 20%, et différents niveaux de bruit ( $z_s = 2$ ) . . . . .	80
4.27	Changement de l'énergie de déformation en fonction du nombre de capteurs ponctuels ( $z_s = 2$ ) . . . . .	80
4.28	Variation de l'énergie de déformation en fonction du nombre d'ELB ( $z_s = 2$ ) . .	81
4.29	Transformées de Fourier numériques du signal d'accélération au point n° 5 pour différents états de la poutre . . . . .	82
4.30	Courbure de la TF pour différents niveaux d'endommagement en fonction de la bande de fréquence choisie . . . . .	83
4.31	Courbure de TF pour différents niveaux d'endommagement pour différentes configurations des points de mesure - bande de fréquences étudiée [0-100] Hz .	83
4.32	Courbure de TF pour deux endommagements de même niveau et différents nombres de points de mesure . . . . .	84
4.33	Courbure de TF pour deux endommagements de niveau différent pour différents nombres de points de mesure . . . . .	84
4.34	Quantification par la méthode de courbure modale à partir de deux types de capteurs (ponctuels et ELB) . . . . .	85
4.35	Quantification par la méthode de flexibilité à partir de deux types de capteurs (ponctuels et ELB) . . . . .	85
4.36	Quantification par la méthode de courbure de flexibilité à partir de deux types de capteurs (ponctuels et ELB) . . . . .	85
4.37	Déplacement numérique en différents points de la poutre excitée . . . . .	86
4.38	Filtrage modal appliqué aux 6 premiers modes de la poutre E-E saine . . . . .	86

4.39 Filtrage modal appliqué aux 6 premiers modes de la poutre E-E pour les différents cas de défaut . . . . .	86
4.40 Fonction de distribution de probabilité pour les deux variables aléatoires : réduction de section de moyenne $\mu_{red} = 12\%$ et perturbation ajoutée de moyenne $\mu_p = 6\%$ . . . . .	90
4.41 Indice de fiabilité $\beta$ calculé pour la méthode de la courbure modale . . . . .	91
4.42 Méthode des courbures modales avec 20 capteurs . . . . .	91
4.43 Méthode des courbures de flexibilité avec 20 capteurs . . . . .	92
4.44 Méthode de l'indicateur d'endommagement avec 20 capteurs ( $z_s = 2$ ) . . . . .	93
4.45 Méthode des courbures modales avec 11 capteurs . . . . .	93
4.46 Méthode des courbures de flexibilité avec 11 capteurs . . . . .	94
4.47 Méthode de l'indicateur d'endommagement avec 11 capteurs . . . . .	94
4.48 Modèle EF de la poutre E-E avec 20 points . . . . .	95
4.49 Déformées modales de la poutre E-E avec les capteurs n° 5, 9, 13 et 16 choisis par la EI. Les points en rouge indiquent les positions optimales. . . . .	96
4.50 Déformées modales de la poutre E-E après élimination des capteurs 1, 3, 6, 9 et 11 choisis par la fonction $f_1$ . Les points en rouge indiquent les positions optimales. . . . .	97
4.51 Déformées modales de la poutre E-E obtenus par des ELB, après élimination des capteurs 1, 4, 6, 8 et 9 en utilisant la fonction $f_1$ . Les points en rouge indiquent les positions optimales. . . . .	98
4.52 Déformées modales de la poutre E-E obtenus par des capteurs ponctuels, après élimination des capteurs 1, 2, 8, 10 et 11 en utilisant la EI. Les points en rouge indiquent les positions optimales. . . . .	99
4.53 Méthodes de détection d'endommagement pour 11 capteurs . . . . .	100
4.54 Méthodes de détection d'endommagement pour 20 capteurs . . . . .	101
5.1 RSV (Right Singular Values) de la collection du quatrième mode propre [1] . . . .	109
5.2 Evolution des quatre premières fréquences (état sain et état endommagé) avec et sans bruit ajouté . . . . .	110
5.3 Quatre premiers modes propres pour 400 simulations (état sain et état endommagé). . . . .	111
5.4 Quatre premiers vecteurs droits de la matrice des deux premières déformées modales. Les courbes rouges indiquent les cas non bruités. . . . .	111
5.5 Quatre premiers vecteurs gauches de la matrice des deux premières déformées modales. Les courbes rouges indiquent les cas non bruités. . . . .	112
5.6 Quatre premiers vecteurs droits de la matrice des deux premières courbures modales. Les courbes rouges indiquent les cas non bruités. . . . .	112
5.7 Quatre premiers vecteurs gauches de la matrice des deux premières courbures modales. Les courbes rouges indiquent les cas non bruités. . . . .	113
5.8 Quatre premiers vecteurs droits de la matrice des deux premiers vecteurs propres pour les ELB. Les courbes rouges indiquent les cas non bruités. . . . .	113



5.9	Quatre premiers vecteurs gauches de la matrice des deux premiers vecteurs propres obtenus pour les ELB. Les courbes rouges indiquent les cas non bruités. . . . .	113
5.10	Quatre premiers vecteurs droits de la matrice de la 1 <sup>ère</sup> déformée modale pour 40, 100 200 et 400 simulations . . . . .	114
5.11	Quatre premiers vecteurs gauches de la matrice de la 2 <sup>ème</sup> déformée modale pour 40, 100 200 et 400 simulations . . . . .	115
5.12	Quatre premiers vecteurs droits de la matrice des deux premières déformées modales pour 40 simulations : 20 états sains - 20 états endommagés avec 1% de bruit . . . . .	115
5.13	Quatre premiers vecteurs droits de la matrice des deux premières déformées modales pour 21 simulations : 20 états sains - 1 état endommagé avec 1% de bruit	116
5.14	Quatre premiers vecteurs droits de la matrice des deux premières déformées modales pour 25 simulations : 20 états sains - 5 états endommagés avec 1% de bruit . . . . .	116
5.15	Quatre premiers vecteurs droits de la matrice des deux premières déformées modales pour 21 simulations : 20 états sains - 1 état endommagé avec 2% de bruit	116
5.16	Quatre premiers vecteurs droits de la matrice des deux premières déformées modales pour 25 simulations : 20 états sains - 5 états endommagés avec 2% de bruit . . . . .	117
5.17	Quatre premiers vecteurs droits de la matrice des deux premières déformées modales pour 40 simulations : 20/état sain - 20/état endommagé avec 2% de bruit	117
5.18	Sept premières déformées modales de la poutre E-E . . . . .	124
5.19	$Q_n(x)$ pour les différents nombre de modes une modification de 2% autour de $x_0 = 0.320m$ . Le trait noir en pointillé indique la position réelle du défaut. . . . .	125
5.20	$Q_n(x)$ obtenus pour une modification de 0.5% autour $x_0 = 0.320m$ . Le trait noir en pointillé indique la position réelle du défaut. . . . .	126
5.21	$\ Q_n\ _\infty$ en fonction de la réduction de section . . . . .	126
5.22	$G$ et $H$ pour les 6 premiers modes. Le trait noir en pointillé indique la position réelle du défaut. . . . .	127
5.23	$G_n(x) \frac{\Delta EI \Delta L}{EIL}$ et $H_n(x) \frac{\Delta \mu \Delta L}{\mu L}$ pour les 6 premiers modes et pour le 4 <sup>ème</sup> cas de défaut. Le trait noir en pointillé indique la position réelle du défaut. . . . .	128
5.24	Droites de régression linéaire : raideur et masse . . . . .	129
5.25	Graphes de $Q_n(x)$ et $\hat{Q}_n(x)$ de la poutre sous tension avec une modification autour de $x_0 = 0.320m$ . Le trait noir en pointillé indique la position réelle du défaut.	131
5.26	Graphes de $Q_n(x)$ et $\hat{Q}_n(x)$ de la poutre avec une modification autour de $x_0 = 0.320m$ et utilisant les fréquences obtenues avec une variation de tension en plus. Le trait noir en pointillé indique la position réelle du défaut. . . . .	132
5.27	Graphes de $Q_n(x)$ et $\hat{Q}_n(x)$ de la poutre sous tension sans défaut . . . . .	133
6.1	Poutre avec une fissure . . . . .	139

6.2	Modèles simples pour modéliser la fissure dans la poutre . . . . .	141
6.3	Plaque en bois percée avec l'axe du trou parallèle à l'excitation [8] . . . . .	141
6.4	Poutre percée avec l'axe du trou parallèle à l'excitation . . . . .	143
6.5	Élément fini avec un trou . . . . .	146
7.1	Photo de la poutre . . . . .	154
7.2	Photo d'un encastrement . . . . .	155
7.3	Photos du pot vibrant . . . . .	156
7.4	Photos des capteurs de vibration . . . . .	157
7.5	Placement des capteurs sur la poutre E-E . . . . .	158
7.6	Photos de la poutre E-E instrumentée . . . . .	159
7.7	Photos du dispositif pour les essais dynamiques . . . . .	159
7.8	Photos de la poutre endommagée avec les différentes tailles de trous . . . . .	159
7.9	Bruit de mesure des accéléromètres et de la jauge ponctuelle $n^{\circ} 5$ . . . . .	161
7.10	Signaux temporels et TF correspondantes obtenus pour la poutre E-E à partir des accéléromètres, de la jauge ponctuelle $n^{\circ} 1$ , de la jauge longue base $n^{\circ} 5$ . . . .	163
7.11	Diagramme de stabilisation pour la poutre E-E pour un essai . . . . .	167
7.12	Trois premières fréquences propres obtenues par COSMAD pour un essai de la poutre E-E saine . . . . .	167
7.13	Trois premières déformées modales obtenues par la SOD et la TO . . . . .	168
7.14	Arêtes et amortissements des trois premiers modes propres de la poutre intacte pour les 100 essais . . . . .	170
7.15	Trois premières fréquences propres obtenues avec les différents types de capteurs pour les 100 essais par ordre chronologique de leur réalisation - Etat sain . . . .	171
7.16	Première fréquence propre avec les accéléromètres pour les 100 essais par ordre chronologique de leur réalisation avec indication de la date de chaque essai - Etat sain . . . . .	171
7.17	Variation de la fréquence instantanée avec les différents types de capteurs pour les 100 essais par ordre chronologique de leur réalisation - Etat sain . . . . .	171
7.18	Histogrammes des trois premières fréquences propres obtenues par les accéléro- mètres et les JLB . . . . .	172
7.19	Arêtes des deux premiers modes propres obtenues à partir des accéléromètres, des JP et des JLB pour l'essai $n^{\circ} 1$ de l'état sain . . . . .	173
7.20	Déformées modales normalisées du premier mode propre obtenues avec les dif- férents types de capteurs pour la poutre saine . . . . .	174
7.21	Déformées modales normalisées du premier mode propre obtenues avec les dif- férents types de capteurs et les 6 états de la poutre . . . . .	176
7.22	Déformées modales normalisées du deuxième mode propre obtenues avec les dif- férents types de capteurs et les 6 états de la poutre . . . . .	176
7.23	Déformées modales normalisées du troisième mode propre obtenues avec les dif- férents types de capteurs et les 6 états de la poutre . . . . .	177

7.24	<b>Différences de déformées modales normalisées obtenues avec les accéléromètres</b>	177
7.25	<b>Coefficients MAC et COMAC</b>	178
7.26	<b>Différences de flexibilité normalisées obtenues avec les différents capteurs</b>	178
7.27	<b>Différences de courbure modale obtenues avec les différents types de capteurs</b>	179
7.28	<b>Différences de courbure de flexibilité obtenues avec les différents types de capteurs</b>	180
7.29	<b>Changements de l'énergie de déformation modale obtenues par les différents types de capteurs</b>	180
7.30	<b>Résultats des méthodes de détection obtenues pour chaque mode propre avec les accéléromètres</b>	181
7.31	<b>Résultats des méthodes de détection obtenues pour chaque mode propre avec les JP</b>	182
7.32	<b>Résultats des méthodes de détection obtenues pour chaque mode propre avec les JLB</b>	183
7.33	<b>Filtrage des 3 premiers modes à partir des signaux d'accélération pour les 100 essais de l'état sain</b>	184
7.34	<b>Filtrage modal appliqué au 3<sup>ème</sup> mode propre à partir des signaux d'accélération provenant de 30 essais de l'état sain</b>	185
7.35	<b>Filtrage modal appliqué aux 3 premiers modes à partir des signaux d'accélération, provenant de la moyenne des essais répétables pour les différents états de la poutre</b>	186
7.36	<b>Filtrage modal appliqué au 3<sup>ème</sup> mode à partir des signaux d'accélération, provenant de la moyenne des essais répétables pour les différents états de la poutre - zoom</b>	186
7.37	<b>Moyenne des TF obtenues à partir des accéléromètres pour la poutre saine et les différents cas de défaut</b>	187
7.38	<b>(a) Différences de courbures de TF (b) Différences de l'énergie de courbure de TF obtenues à partir des accéléromètres</b>	187
8.1	<b>Zones d'étude sur une image de référence et sur une image déformée [2]</b>	193
8.2	<b>Principe de la corrélation d'images : le marquage (« mouchetis » de peinture) suit le mouvement matériel</b>	194
8.3	<b>Dispositif expérimental [4]</b>	195
8.4	<b>Zone d'intérêt pour la corrélation d'images lors de l'étude de la vitesse de fissuration sur une poutre en flexion trois points [4]</b>	196
8.5	<b>Champs de déplacements (en pixel) dans la poutre lors de l'essai de choc [4]</b>	196
8.6	<b>Déplacement temporel de la poutre intacte [8]</b>	197
8.7	<b>Méthode générale d'obtention de la déformée modale à partir d'une séquence d'images [8]</b>	197
8.8	<b>(a) Photo de la poutre E-L en flexion, (b) Image typique prise par la caméra SONY [8]</b>	197
8.9	<b>Première courbure modale de la poutre endommagée [8]</b>	198

8.10	Exemple d'estimation du mouvement. Les 10 points à corrélérer sont en vert et la zone à étudier est celle qui est dans le cadre orange . . . . .	198
8.11	Exemple d'estimation du mouvement. Les 10 points à corrélérer sont en vert et la zone à étudier est celle qui est dans le cadre orange . . . . .	198
8.12	Types d'interpolation :(a) et (d) Plus proche(b) et (e) bilinéaire (c) et (f) bicubique	201
8.13	Grille virtuelle pour la poutre E-E . . . . .	202
8.14	Poutre instrumentée par la caméra rapide . . . . .	203
8.15	Roche argileuse . . . . .	203
8.16	Poutre avec mouchetis . . . . .	204
8.17	Histogramme de niveaux de gris pour l'image de référence . . . . .	204
8.18	SNR mesuré à partir d'une suite d'images enregistrées . . . . .	206
8.19	Images avant et après déformation dans la zone d'intérêt . . . . .	206
8.20	Coefficients de corrélation . . . . .	207
8.21	Signal temporel du déplacement transverse et TF correspondante obtenus pour la poutre E-E à partir de la caméra . . . . .	207
8.22	Série de déplacement temporel pour la poutre E-E . . . . .	208
8.23	Deux premiers modes propres obtenus à partir de la caméra pour différent nombre de points . . . . .	209
8.24	Deux premiers modes propres obtenus à partir la caméra pour différents domaines de corrélation (DC) . . . . .	210
8.25	Deux premiers modes propres obtenus pour les 6 états de la poutre . . . . .	211
8.26	Coefficients MAC et COMAC obtenus à partir de la corrélation d'images . . . . .	211
8.27	Méthodes de détection appliquées aux paramètres modaux identifiés à partir des mesures par la caméra. Le trait noir en pointillé indique la position du trou. . . . .	212
8.30	Matrice de MAC . . . . .	212
8.28	Déplacement transverse obtenu (a) avec la corrélation d'images (b) par double intégration du signal d'un accéléromètre (c) numériquement . . . . .	213
8.29	Deux premiers vecteurs propres théoriques, numériques et par la caméra . . . . .	213
8.31	Régression linéaire entre les modes propres théoriques et expérimentaux pour les deux premiers modes . . . . .	214
9.1	Quatre premiers vecteurs singuliers à droite (RSV pour right singular vector) de la matrice de l'évolution des fréquences propres $A_{\lambda}^{(1:100)}$ pour les accéléromètres	219
9.2	Quatre premiers vecteurs singuliers à droite (RSV pour right singular vector) de la matrice de collection des fréquences propres avant l'apparition du trou $A_{\lambda}^{(1:100)}$ pour les accéléromètres . . . . .	220
9.3	Quatre premiers vecteurs singuliers à droite (RSV pour right singular vector) de la matrice de collection des déformées modales $A_{\phi}^{(1:100)}$ pour les accéléromètres - Poutre saine . . . . .	221

9.4	Quatre premiers vecteurs singuliers à droite (RSV pour right singular vector) de la matrice de collection des déformées modales $A_{\phi}^{(1:100)}$ pour les accéléromètres - Trou 2mm . . . . .	222
9.5	Quatre premiers vecteurs singuliers à droite (RSV pour right singular vector) de la matrice de collection des déformées modales $A_{\phi}^{(1:100)}$ pour les accéléromètres - Trou 10mm . . . . .	222
9.6	Quatre premiers vecteurs singuliers à gauche (LSV pour left singular vector) de la matrice de collection des déformées modales $A_{\phi}^{(1:100)}$ pour les accéléromètres - Trou 10mm . . . . .	223
9.7	Quatre premiers vecteurs singuliers à droite (RSV pour right singular vector) de la matrice de collection des vecteurs propres $A_{\Psi}^{(1:100)}$ pour les JLB - Trou 10mm .	224
9.8	Quatre premiers vecteurs singuliers à gauche (LSV pour left singular vector) de la matrice de collection des déformées modales $A_{\Psi}^{(1:100)}$ pour les JLB - Trou 10mm	225
9.9	Points expérimentaux pour la déformée modale du 1 <sup>er</sup> mode et première déformée modale analytique recalée . . . . .	227
9.10	Doites de régression linéaire entre $\phi_k^{exp}$ et $\phi_k^{th}$ . . . . .	228
9.11	MAC : déformées modales théoriques recalées vs déformées modales expérimentales . . . . .	229
9.12	$Q_3(x)$ obtenus pour les 5 cas de défaut. Le trait noir en pointillé indique la position réelle du défaut. . . . .	230
9.13	$\hat{Q}_n(x)$ obtenus pour les 5 cas de défaut. Le trait noir en pointillé indique la position réelle du défaut. . . . .	231
9.14	Poutre avec une masse ajoutée . . . . .	232
9.15	$Q_n(x)$ et $\hat{Q}_n(x)$ pour les deux états d'ajouts de masses. Le trait noir en pointillé indique la position réelle de la masse. . . . .	232
A.1	Graphes des quatre premières déformées modales normalisées de la poutre ( $\phi_k$ ) pour les CL : E-E et E-L. . . . .	241
A.2	Placement de JLB en continu sur la poutre E-E. . . . .	245
C.1	Localisation dans le plan temps-fréquence de : l'ondelette mère (à gauche) et la transformée en ondelettes (à droite), d'après [2]. . . . .	251
C.2	Localisation dans le plan temps-fréquence de l'ondelette mère de Cauchy (trait continu (-)) et de sa version dilatée-translatée avec $a>1$ (traits pointillés (-.)) et $a<1$ (traits discontinus (-)), d'après [2]. . . . .	258
C.3	Modules de la TO (avec l'ondelette de Cauchy) d'un signal avec une longueur infinie (à gauche) et finie (à droite), d'après [2]. . . . .	258
C.4	Modules de la TO d'un signal sur le plan temps-fréquence. Les différents domaines $D$ , où l'effet de bord est négligé, sont représentés pour plusieurs valeurs de $c_t$ et $c_f$ , d'après [2]. . . . .	260

C.5	Modules de la TO (Cauchy) d'un signal avec $Q = 5$ (à gauche) et $Q = 9$ (à droite), d'après [2]. . . . .	261
E.1	Signaux temporels et TF correspondantes pour les différents types de capteurs .	267
E.2	Déformées modales du premier mode obtenues pour deux types de capteurs : accéléromètres et JLB . . . . .	268
E.3	Déformées modales du deuxième mode obtenues pour deux types de capteurs : accéléromètres et JLB . . . . .	268
E.4	Déformées modales du troisième mode obtenues pour deux types de capteurs : accéléromètres et JLB . . . . .	268
E.5	MAC pour l'appariement des modes numérique/expérimental . . . . .	269
F.1	Quatre premiers vecteurs singuliers à droite (RSV pour right singular vector) de la matrice de collection des fréquences propres $A_{\lambda}^{(1:100)}$ - Trou de diamètre 8mm	271
F.2	Quatre premiers vecteurs singuliers à droite (RSV pour right singular vector) de la matrice de collection des fréquences propres $A_{\lambda}^{(1:100)}$ - Trou de diamètre 6mm	272
F.3	Quatre premiers vecteurs singuliers à droite (RSV pour right singular vector) de la matrice de collection des fréquences propres $A_{\lambda}^{(1:100)}$ - Trou de diamètre 4mm	273
F.4	Quatre premiers vecteurs singuliers à droite (RSV pour right singular vector) de la matrice de collection des fréquences propres $A_{\lambda}^{(1:100)}$ - Trou de diamètre 2mm	274
F.5	Quatre premiers vecteurs singuliers à droite (RSV : right singular vector) de la matrice de collection des déformées modales $A_{\Phi}^{(1:50)}$ - Trou 8mm . . . . .	275
F.6	Quatre premiers vecteurs singuliers à droite (RSV : right singular vector) de la matrice de collection des déformées modales $A_{\Phi}^{(1:100)}$ - Trou 6mm . . . . .	276
F.7	Quatre premiers vecteurs singuliers à droite (RSV : right singular vector) de la matrice de collection des déformées modales $A_{\Phi}^{(1:100)}$ - Trou 4mm . . . . .	276

# Liste des tableaux

1.1	Synthèse de la performance des méthodes de détection tirée de la littérature : « D » pour Détection et « L » pour Localisation . . . . .	6
2.1	Fréquences propres et variations relatives pour les différents niveaux de l'endommagement- Pont I40 [14] . . . . .	15
3.1	Estimation numérique de $F_4$ pour différentes conditions aux limites [24] . . . . .	55
3.2	Estimation numérique de $\alpha$ pour différentes conditions aux limites [24] . . . . .	55
4.1	Caractéristiques de la poutre E-E . . . . .	61
4.2	Caractéristiques des vingt cas d'endommagement simulés . . . . .	62
4.3	Quatre premières fréquences numériques et théoriques de la poutre intacte . . . . .	63
4.4	Fréquences propres et variations relatives correspondantes pour quelques ni- veaux d'endommagement . . . . .	65
4.5	Ecart-types pour les déformées modales obtenues par des capteurs ponctuels pour 1000 réalisations . . . . .	90
4.6	Résolution spatiale optimale, nombre de capteurs optimal correspondant et in- tervalle de résolution spatiale pour chacun des modes . . . . .	99
4.7	Placement des capteurs ponctuels sur la poutre E-E . . . . .	100
5.1	Caractéristiques de la poutre E-E . . . . .	109
5.2	Caractéristiques des différents cas d'endommagement simulés . . . . .	123
5.3	Sept premières fréquences propres de la poutre E-E saine et avec défaut . . . . .	124
5.4	Variations de rigidité et de masse estimées et obtenues par EF pour une modifi- cation autour de $x_0 = 0.320m$ . . . . .	128
5.5	Estimation des paramètres $a$ et $R^2$ . . . . .	129
5.6	Les variations relatives des 6 premières fréquences propres de la poutre E-E . . . . .	130
5.7	Les 8 premières fréquences propres et variations relatives correspondantes de la poutre E-E saine et endommagée . . . . .	130
5.8	Modifications estimées et EF pour une réduction de 2% de section et une varia- tion de tension . . . . .	131
5.9	Modifications estimées et obtenues par EF pour une poutre supposée sans varia- tion de tension . . . . .	132

6.1	Caractéristiques de la poutre E-E . . . . .	147
6.2	Caractéristiques des 5 cas simulés . . . . .	148
6.3	Masse d'un élément troué pour les 5 cas simulés . . . . .	149
6.4	Fréquences propres et variations relatives pour les 5 niveaux d'endommagement	150
7.1	Caractéristiques de la poutre E-E . . . . .	154
7.2	Fréquences expérimentales de la poutre L-L intacte et module d'Young corres- pondant . . . . .	155
7.3	Caractéristiques du pot vibrant . . . . .	156
7.4	Caractéristiques de l'accéléromètre . . . . .	157
7.5	Caractéristiques de la jauge longue base . . . . .	157
7.6	Caractéristiques de la jauge ponctuelle . . . . .	157
7.7	Placement des accéléromètres, des jauges longue base et des jauges ponctuelles sur la poutre E-E . . . . .	158
7.8	Cas d'endommagement . . . . .	160
7.9	Comparaison entaille-trou . . . . .	160
7.10	Ecart-type du bruit des accéléromètres et des jauges et valeur du SNR (dB) . . .	161
7.11	Résolution spatiale optimale : nombre de capteurs optimal correspondant et in- tervalle de résolution spatiale pour les trois premiers modes de la poutre . . . .	162
7.12	Paramètres de la TO pour le traitement des signaux temporels des différents types de capteurs. . . . .	164
7.13	Trois premières fréquences propres identifiées par la TO pour la poutre E-E saine, à partir des accéléromètres pour les 100 essais. . . . .	165
7.14	Vecteurs propres obtenus par la TO pour les trois premiers modes de la poutre E-E saine à partir des accéléromètres. . . . .	165
7.15	Déformées modales des trois premiers modes propres déterminés avec la SOD à partir des signaux des accéléromètres pour la poutre E-E saine (100 essais). . . .	166
7.16	Fréquences propres obtenues par la SOD pour les trois premiers modes de la poutre E-E saine à partir des accéléromètres. . . . .	166
7.17	Trois premières fréquences propres identifiées par COSMAD pour la poutre E-E saine, à partir des accéléromètres. . . . .	167
7.18	Trois premières fréquences propres identifiées par COSMAD, la TO et la SOD pour la poutre E-E saine à partir des accéléromètres. . . . .	168
7.19	Fréquences propres et amortissements modaux et déformées modales du 1 <sup>er</sup> mode propre déterminés avec la TO à partir des signaux des accéléromètres, des jauges ponctuelles et des jauges longue base pour la poutre E-E saine. . . . .	173
7.20	Fréquences propres et amortissements modaux et déformées modales du 2 <sup>ème</sup> mode propre déterminés avec la TO à partir des signaux des accéléromètres, des jauges ponctuelles et des jauges longue base pour la poutre E-E saine. . . . .	174



7.21	Fréquences propres et amortissements modaux et déformées modales du 3 <sup>ème</sup> mode propre déterminés avec la TO à partir des signaux des accéléromètres, des jauges ponctuelles et des jauges longue base pour la poutre E-E saine. . . . .	175
7.22	Fréquences propres et variations relatives pour les 5 cas d'endommagement à partir des trois types de capteurs . . . . .	176
8.1	Abscisse des points de la grille en (pixel) et en (mm) par rapport à l'encastrement gauche de la poutre E-E . . . . .	202
8.2	Fréquences propres et variations relatives des fréquences pour les 5 cas d'endommagement pour la corrélation d'images et les accéléromètres . . . . .	210
8.3	MAC calcul corrélation d'images . . . . .	214
8.4	Estimation des paramètres $a$ , $b$ et $R^2$ . . . . .	215
9.1	Coefficients $\beta_k L$ théoriques et expérimentaux . . . . .	226
9.2	Les paramètres $a_k$ venant du recalage de l'équation 9.1 . . . . .	227
9.3	Résultats de la régression linéaire pour les paramètres $c$ , $d$ et $R^2$ . . . . .	229
9.4	Caractéristiques des ajouts de masse . . . . .	232
9.5	Fréquences expérimentales de la poutre E-E intacte, avec le trou de 10mm de diamètre et les 3 ajouts de masse . . . . .	233
9.6	Variations relatives des fréquences par rapport à l'état de référence. . . . .	233
9.7	Variation de masse estimées et réelles pour une modification autour de $x_0 = 0.321m$	234
C.1	Caractéristiques de l'ondelette mère de Cauchy. . . . .	257
E.1	Quatres premières fréquences propres identifiées numériquement et expérimentalement. . . . .	267
E.2	Vecteurs propres déterminés avec la TO à partir des signaux des accéléromètres et des JLB pour la poutre E-E. . . . .	269
E.3	Valeurs de MAC . . . . .	269